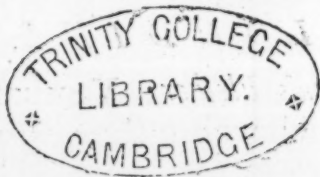


f. 15, 41 f. 20 36 5. 8. 20

Oughtredus explicatus,
SIVE
COMMENTARIUS
IN
Ejus Clavem Mathematicam.
Cui additæ sunt
Planetarum Observationes
&
Horologiorum Constructio.

Authore
GILBERTO CLARK.

L O N D I N I;
Typis *Milonis Flesher*; Veneunt apud *Ric.*
Davis, Bibliopolam *Oxonienfem*, 1682.



C

ILLUSTRISSIMO VIRO

&

Domino meo Colendissimo ,

JUSTINIANO ISHAMO,

BARONETTO,

EX

Antiqua *ISHAMORUM* Gente,

IN

Agro Northamptoniensi oriundo;

Hanc suam

Clavis Mathematicæ Interpretationem;

In testimonium tum observantiæ suæ,

Tum inprimis gratitudinis,

D. D. D.

Gilbertus Clark.



A D

JUVENES ACADEMICOS.

ID mihi præcipue in hoc Scripto proposui, ut vos (Academici Ornatissimi) *Oughtredum* nostrum, tantum virum, sine alio Tutore, intelligeretis; utrum vero scopum meum attigerim, iis qui experimentum fecerint, judicandum relinquo: nollem equidem studia vestra majoris momenti nimium interpellare; nam hæc nostra, ut non sunt lucrosa, ita nec æque necessaria, atque linguarum peritia & veri nominis philosophia, præsertim quod ad eos attinet, quibus Theologiam practicam rure, exercere propositum est; interim ornamento cuivis esse possint, imo necessaria usque adeo ut in nullo genere viri magni nomen mereatur, qui in Mathematicis non sit aliquantulum versatus; ecquam ridiculum est, quod grandes Metaphysicorum Magistri nesciant qua arte extrahenda sit Radix quadrata, vel solvenda *Æquatio* quadratica, utrum in Triangulo rectilineo, tres anguli æquales sint duobus rectis; quot Circuli in Sphæra, &c. Quandoquidem in cujusvis Academici, ludentis potius quam studentis potestate situm est, sine multo temporis dispendio hæc omnia & longe majora consequi. Ego igitur in commune subsidium scripsi has Annotationes, quæ ad umbilicum perductæ sunt, &

Ad Juvenes Academicos.

missæ (in hac quam videtis forma, ante annos viginti, ut publici juris fierent) ad Typographum, sed ille me fefellit ; ideoque pulveri & æternis tenebris eas mandassem, nisi Dominus *Zacheus Ishamus*, *Ædis Christi* Alum. Vir omnigena eruditione refertus, mihi animos addidisset, easque quasi ab orco revocasset; nempe ille quum forte fortuito legisset Præfatiunculam ante Philosophicam Disputationem quam anno 1662 edidi adversus Virum doctissimum, *Franciscum Linum*, & in qua hujus Scripti mentionem aliquam feci ; per nuncium illico mihi significavit, Academicis gratum futurum *Oughtredi* Interpretem Latinum, qui brevi Libro, Authoris tam Canonici Vestigia, *αἰνὰ πῶδας* premeret, seque ipsum suscepturum, ut Annotationes prælo excuderentur; obsequutus sum votis ejus, qui fidem suam liberavit; ideoque & illi gratiæ debentur, si quæ forte ex hoc Opusculo deberi videantur: Sciatis autem quod ego, destinata opera sparsim variis locis, inserui, non modo quæ ad *Oughtredum* intelligendum necessaria essent, verum etiam quæ *Cartesianæ* Geometriæ & Astronomiæ facem præferrent, hujusque ratione Appendicem Astronomicam una imprimendam curavi: utroque Libello fruimini, Optimi Juvenes, & valete.

P R O

PROLOGUS AUTHORIS.

Patres, Virosque quotquot undiquaque, vel
In Universitate, sive in Urbe sint,
An Aulici sient, sientve Rustici,
Rogabo, maximeque Cantabrigiæ,
Domusque Sidniensis, Arbitros probos,
Episcoposque, Præsulesque candidos,
Quibus data est tremenda Clavis $\Xi\epsilon\gamma\upsilon\omega\nu$,
Rogabo, Clavis ut mea Explicatio
Ab omnibus recepta sit benigniter,
Amentque me, prout bonos amaverint.

G. C. Coll. Sidneiani,

Ad Interpretem.

Gaudete, O Numerique Lineæque!
Et quantum est hominum Algebraicorum,
Clavis quam fabricavit & polivit,
Solertissimus ille disciplinæ
Oughtredus Pater: En tuo labore
Docta est, Clerice, dimovere claustra,
Et claram facere omnibus mathesin.

R. Richardson. Coll. Eman.

In Authorem.

Oughtredi insignem late ornat fama laborem,
Teque tuum; Interpres, nobilitabit Opus.
Multa obscura prius dum tam manifesta dedisti,
Lectoris labor, at non tua fama, minor.

R. G.

In Oughtredum Explicatum.

Author & Interpres numeris meruere, sed
Descit ille suis, descis ipse tuis. (audi,
Ambos tentavi, nec sufficit Algebra laudes
Enumerare suas, enumerare tuas.

Joh. Courtman. Aul. Clar.

Linea quæ dudum Serpentis more voluta,
Mira tortilibus flectitur arte modis,
Abjicit exuvias, monstrat se clarius orbi,
Nec quæ spectari digna latere finit.

M. Courtman. Trin. Coll. Cantab.

Ad Authorem Carmina poscentem Epilogus.

Carmina à me vis? neque sum Poeta,
Nec sagax (ut scis) analysta; præsto
Sapphicum hoc unum, puta præstitum quod
Postulat Author.

G. C.

Ought-

m,
us.
ti,

ed
di,

ar.

ab.

od

bt-



c.

hi-
um
, &c.
ro-
aris
eris

ticē
lis ;
mpe

Zoa.

O pol. Zo

Stella

Z Zenith.

Fig. 3

Eclipt

Stella

Plan L
m

parallel.

u

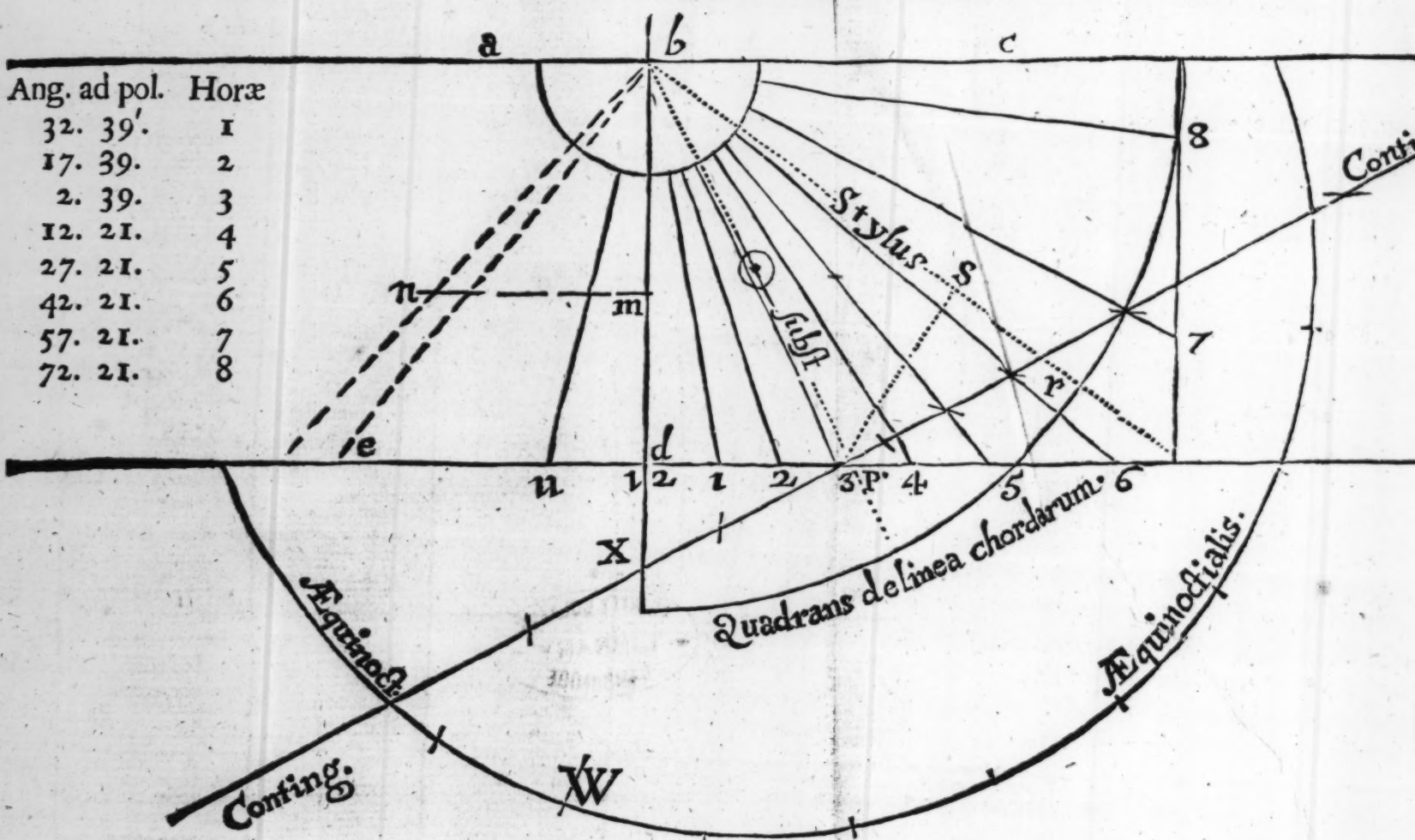
Eclipt

n

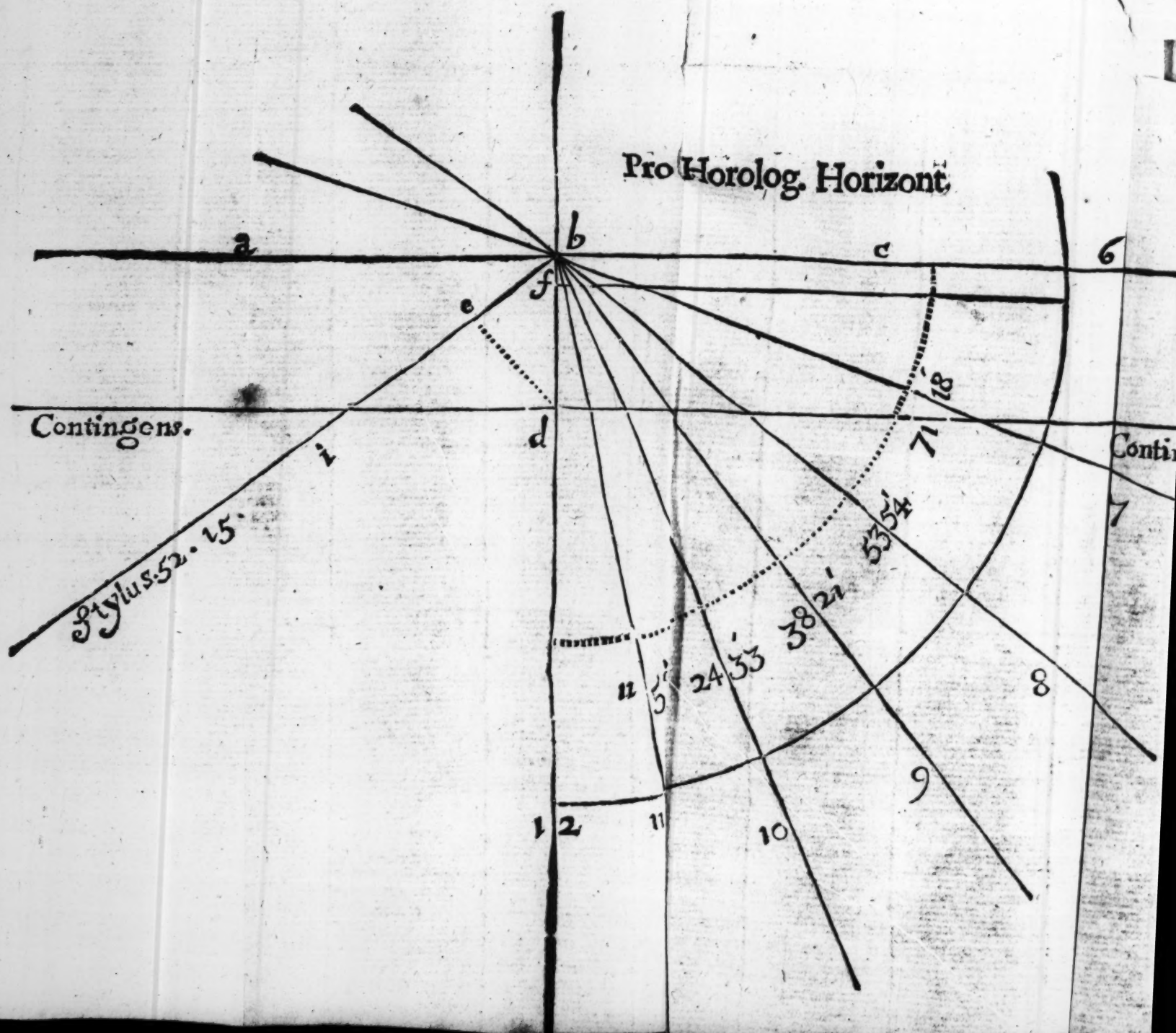
hi-
um
; &c.
ro-
aris
eris
rice
lis &
mpe

Pro Horol. Vertic. Declin.

| Ang. ad pol. | Horæ |
|--------------|------|
| 32. 39. | 1 |
| 17. 39. | 2 |
| 2. 39. | 3 |
| 12. 21. | 4 |
| 27. 21. | 5 |
| 42. 21. | 6 |
| 57. 21. | 7 |
| 72. 21. | 8 |



Pro Horolog. Horizont.



Oughtredus explicatus,

SIVE,

COMMENTARIUS

IN

Clavem Mathematicam Oughtredi.

CAP. I. De Notatione.

§. I.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|-----|-----|----|---|---|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | , &c. |
| M | MM | MMM | MMM | CX | I | X | C | MM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM | MMM |
| M | MM | MMM | CX | I | | | | | | | | | | | | | | | |
| M | C | X | I | | | | | | | | | | | | | | | | |

PRO notatione numerorum, primâ facie exhibet hæc Tabella uniuscujusque numeri suum sibi proprium characterem, ita, &c. 43210, &c. pro computatione; vides hic duos numerorum ordines descriptos, viz. superiorem unum, figuris numeralibus, &c. 3210; inferiorem alterum, literis numeralibus Romanis, &c. CXI.

Superior constat ex numeris ab unitate arithmetice proportionalibus, viz. quorum differentia est æqualis;

Sm B p. 8 nempe

Conting.

Oughtredus explicatus, sive,

nempe differentia inter 1 & 2 est unitas, pariter differentia inter 2 & 3 est etiam unitas.

Inferior ordo constat ex numeris (continuè multiplicando per X) ab unitate geometricè proportionabilibus, viz. quorum quotientes sunt æquales, nimirum quoties C est in M toties X in C, & toties unitas in X, scil. decies.

Inferior ordo computationi per numeros communes inservit, indicando valorem uniuscujusque figuræ præ ratione loci quem obtinet; nempe primus locus est *μωδδω*, sive unitatum, I; secundus, *δεδδω*, X; tertius, *εγγρσδδω*, C, &c. & post quasque tres literas factâ lineâ perpendiculari, ut vides in Tabella, ita, &c. M | C X I; primus secundi ternionis est millium, primus tertii ternionis est millies millium, & sic deinceps: vel, commate facto, scribe in hunc modum, 978,923,456. altera Tabellæ pars quæ sequitur cyphram 0, & lineam separatricem, ità, $\overline{10^{\frac{1}{X}} \frac{X}{C} \frac{M}{M}}$, &c. utilis est ad fractio-

num (quas hîc partes appellat) computationem: inferior ordo denominatoris vicem obtinet, & ostendit in quot partes unitas dividatur, ut, X C M, &c. superior numeratoris officio fungitur, & ostendit quot ex illis partibus sumendæ sunt, ut, $\frac{1}{X}$ sive $\frac{1}{10}$, id est, una pars decima, vel si unitas in decem partes frangatur, quòd sumenda est una tantum ex illis; si $\frac{1}{10}$ tum quinque ex illis sumendæ: in hac parte observare debes lineolas supra figuras, ità, $\frac{1}{10}$, &c. quibus significatur numeros illos esse partes sive fractiones, sive negativos, id est, unitate minores, nam tota hæc fractio $\frac{978923456}{1000000000}$ non valet unam (ut ità dicam) unitatem,

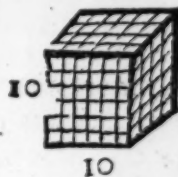
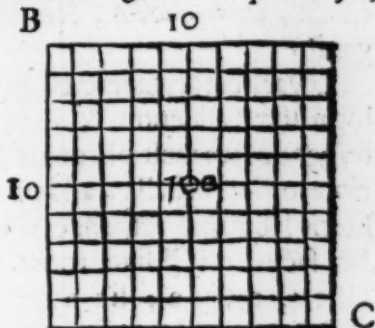
sed

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 3

sed si unitas dividatur in 10000000 partes, erunt ex illis sumendæ 99999999; inservit etiam hæc tabella numeris figuratis: sed quid est numerus figuratus?

Respondeo. Diximus inferiorem ordinem constare ex numeris geometricè proportionalibus; & in progressionem, I in loco unitatum cujus index 0 est numerus (ut sic loquar) absolutus, X cujus index 1 est radix, C cujus index 2 est numerus quadratus; M est cubus cujus index 3: $\frac{M}{X}$ five 10000 est quadrato-quadratus, cujus index 4 sequitur quadrato-cubus, & hunc reliquæ potestates deinceps; appellantur autem hi numeri figurati, nomine ducto à geometricis figuris in quibus ja-

cent. Multiplica 10 B per 10, & factus erit 100. Hic vides 100 minora quadrata contineri intra magnum quadratum cujus latus five radix est 10. Si iterum factum hunc 100 multiplices per eundem numerum 10, factus erit 1000, qui erit solidum five cubus. Et in magno cubo, cujus latus 10, habebis 1000 minores cubos.



B 2

Jacent

4 Oughtredus explicatus, sive,

Jacent & alii numeri in figuris, ut ex 3 in 6 fit 18,

| | | | | | |
|---|--|--|----|--|--|
| | | | | | |
| 3 | | | 18 | | |
| | | | | | |

6

qui tamen numerus 18 non est quadratus; at cum istiusmodi figuratis numeris nobis hoc loco nihil agendum: sunt quidam numeri (qui primi appellantur) ut 3, 5, 7, 11, 13, &c.

& in nullis figuris reperiuntur: sed scire praestat, quod quamvis in Geometria atque in rerum natura ultra lineam, superficiem & solidum nulla detur magnitudo; in Arithmetica tamen multiplicando continue procreamus insuper quadrato-quadratum, quadrato-cubum, cubo-cubum, &c. qui sunt etiam numeri figurati.

Logarithmorum hac est proprietas, quod prout ipsi logarithmi adduntur & subtrahuntur, ita numeri illis respondentes multiplicantur & dividuntur; ita in superiore ordine tabellae, adde 2 ad 3, summa est 5, sic in literis Romanis respondentibus, multiplicando C per M, factus erit M sive 100000; ita subtrahendo, ex 6 tolle 4, restat 2: sic etiam divide M per M, quotiens erit C, qui sub 2 pingitur.

§. 2.

Superiores numeri sunt indices sive exponentes, nempe indicant numerorum denominationes sive gradus: 0 indicat numerum absolutum: sic 5 N significat quinque unitates; & ideo dicitur absolutus, quia aestimatur solummodo ab unitatibus quas continet, sine ullo alio respectu, ut sit vel radix vel quadratum, &c. alterius alicujus numeri.

I. Indicatus

1. Indicat radicem quæ in tabella est 10, X, una dimensio.

2. Indicat quadratum, ut C, ex duabus dimensionibus, five ex X, multiplicato per X.

3. Indicat cubum, ut M ex tribus dimensionibus constantem, *scil.* ex X in X in X continuè multiplicando; & sic deinceps.

Estque progressio in decupla ratione versus sinistram, certè ita habetur in omnibus quos vidi codicibus, at minùs rectè: est enim I ad X versus sinistram ratio subdecupla, & pariter in fractionibus $\frac{1}{10}$ est ad 1 in ratione subdecupla; atque in eadem est $\frac{1}{100}$ ad $\frac{1}{10}$.

4. Tabella in decimali ratione ordinatur; nonnunquam reducendæ sunt communes fractiones ad decimales, ut hæc fractio communis $\frac{4}{5}$ æque valet atque decimalis $\frac{8}{10}$ ad quam ergo illa reduci possit; hujusmodi reductiones quandòque sunt satis operosæ, ideòque commode evitantur, præsertim operando per sinus & tangentes, ubi præstat ut radius five semidiameter sit 1,00000, id est, 1 cum circulis five cyphris annexis, ut in sinuum tabulis videre potes.

6. Non scribes partes decimales ita $\frac{5}{10} \frac{56}{100} \frac{56}{1,000}$ sed brevitalis & concinnitalis causâ, ita, $0\frac{5}{10} 0\frac{56}{100} 0\frac{56}{1,000}$ vel, si placet, ita, $\cdot\frac{5}{10} \cdot\frac{56}{100} \cdot\frac{56}{1,000}$

7. In hoc numero $0\frac{500}{1000}$ linea separatrix ostendit illum esse fractionem, & duæ cyphræ post figuram 5 sunt prorsus supervacaneæ atque ac si abessent, ita $0\frac{5}{10}$

12. Quod attinet ad usum signorum + & - tum etiam pl. & min. magna differentia est attendenda, quam ita accipe; 4 est numerus simplex, at 4 + 3 est numerus compositus, & valet 7: jam si dicam 8 +

quadr. $4 + 3$ intelligo 27: quadratum enim ex 4, hoc est, 16, per se accipio.

Sed si dicam 8 pl. quadr. $4 + 3$ intelligo 57, quia $4 + 3$ conjunctim valent 7, cujus quadrat. est 49.

13. A B C, &c. literæ alphabeti vocantur species, vel symbola, unde hæc arithmetica speciosa appellatur, potes characteres quos velis usurpare; verum eliguntur literæ alphabeti, utpote familiares & notissimæ.

14. Speciosa arithmetica optimè inservit potestatum & æquationum analysi, quâ radices eruuntur è potestatibus ex retrograda; quæ omnino cernitur compositionis sive geneleos viâ; & in hac arte quanquam quæsitum est naturâ posterius noto, incipis tamen in problematibus resolvendis à quæsito sive ab ignoto, ac si notum esset, ut infra planius intelliges.

Ex 3 multiplicato per 4 fit 12, sed in his figuris apparet neque 3 neque 4, quin penitus absorbentur; sed si pro 3 statuas A, & pro 4 statuas B, certè ex A multipl. per B fit AB, ut infra intelliges, ubi in producto vides utrumque factorem, scil. tum A tum B scire debes quòd in omnibus ferè artibus & scientiis quædam per anticipationem dicuntur; ideòque quomodo ex hoc modo operandi nempe per species fiunt theorematum generalia intelliges ad Cap. 11. ubi ingentem theorematum cumulum habebis.

CAP. II. De Additione.

§. 3.

$$\begin{array}{r} 3794 | 236 \\ 584 | 3 \\ 947 | 08 \\ 4720 | 7439 \\ 48 | 5 \\ \hline 10094 | 8599 \end{array}$$

IN hoc exemplo fractiones omnes sunt decimales; $|236$ valet $\frac{236}{1000}$, $|08$ valet $\frac{8}{100}$ atque omnes additæ faciunt 18599, unde unitas in memoria reservatur asportanda ad integros proximi ordinis, *scil.* in locum unitatum: atque hæc est fractionum decimalium utilissima proprietas; quòd sine mora transeant ad integros, ratio est, quia $\frac{1}{100}$ decies continetur in $\frac{1}{10}$, & $\frac{1}{10}$ decies continetur in unitate: nam $\frac{1}{100}$ valent $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{10}$ valent unitatem.

§. 4.

Additio speciosa conjungit omnes magnitudines datas, servatis signis, ad 3A adde A, summa est 3A + A, hoc est, 4A, cogitare debes signum + præfixum ipsi A, per Sect. II. prioris Cap. ac si scriptum esset, ad 3A adde + A, tum etiam concipere potes unitatem affixam ipsi A, (nam A valet 1A) ac si scriptum esset, ad 3A adde + 1A, sed 3A & 1A sunt 4A.

Ad 5A adde - 3A, summa est 5A - 3A, hoc est, 2A; dices, quare 2A? ratio est, quia propter - 3A sub signo negativo expungere debes æqualem partem ex 5A affirm. *scil.* expungere debes 3A ex 5A, ideòque habebis tantum 2A pro summa.

Ad A adde A, summa erit A + A, hoc est, 2A, sed

B 4

fi ad

si ad A addas $-A$, summa erit $A - A$, hoc est, 0 , quia una species expungit alteram.

In indicum additione, ad 3 adde 2 , summa est 1 , & ad 3 adde 2 summa est 13 observare debes lineolas negativas supra figuras, ita 333 hinc expungendum, ut ante.

CAP. III. De Subductione.

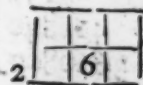
S. 4.

Subductio speciosa conjungit utramque magnitudinem datam mutatis omnibus signis magnitudinis subducenda, ex $5A$ tolle $-3A$, restat $5A + 3A$, mutato signo $-$ in signum $+$; restat inquam $5A + 3A$, hoc est, $8A$, atque ex his vides quod si tollas $-$, idem evenit ac si adderes $+$; & si tollas $+$, idem evenit ac si adderes $-$: nam ad $5A$ adde $-3A$, sum. est $2A$, ut in priore Capite; & ex $5A$ tolle $+3A$, restat $5A - 3A$, hoc est, $2A$. Per hanc Sectionem, magnitudines compositae quandoque subducuntur per signum minus quod valet minus; & tum reliqua servantur signa, ut ex $A + E$ tolle $B - C + D$, restat $A + E$ min. $B - C + D$.

CAP. III. De Subductione. S. 4. Subductio speciosa conjungit utramque magnitudinem datam mutatis omnibus signis magnitudinis subducenda, ex $5A$ tolle $-3A$, restat $5A + 3A$, mutato signo $-$ in signum $+$; restat inquam $5A + 3A$, hoc est, $8A$, atque ex his vides quod si tollas $-$, idem evenit ac si adderes $+$; & si tollas $+$, idem evenit ac si adderes $-$: nam ad $5A$ adde $-3A$, sum. est $2A$, ut in priore Capite; & ex $5A$ tolle $+3A$, restat $5A - 3A$, hoc est, $2A$. Per hanc Sectionem, magnitudines compositae quandoque subducuntur per signum minus quod valet minus; & tum reliqua servantur signa, ut ex $A + E$ tolle $B - C + D$, restat $A + E$ min. $B - C + D$.

CAP. IV. De Multiplicatione.

1. **S**I multiplices 2 per 3 fit 6, qui est factus five rectangulum, atque 2 & 3 sunt factores five latera rectanguli, ut in Figura.



2. 3. & 4. In Multiplicatione maxime habenda est ratio locorum in quibus ponendi sunt particulares facti ex singulis unius numeri figuris ductis in singulas alterius, ut si multiplices 4576 per 892, incipere debes ad dextram, hoc est, cum 2 in 892, cujus factus particularis erit 9152; tum multiplica per 9 in 892, & factus erit 41184; locandus uno loco propius sinistram versus, multiplicabis demum per 8 in 892, & productum 36608 statues uno loco adhuc propius sinistram versus, ita,

4576 } Factores.
892 }

9152 } Particulares facti in suis propriis locis.
41184 }
36608 }

4081792 Summa, five factus totalis.

Ratio locandi est, quia multiplicando per 9 in 892 revera multiplicabas per 90, & multiplicando per 8 in 892 revera multiplicabas per 800; ideoque scribendo cyphas in locis vacuis opus ita staret,

4576

10 Oughtredus explicatus, sive,

4576 } Factores.
892 }

9152 }
411840 } Particulares facti.
3660800 }

4081792 Factus totalis.

Alterum exemplum,

580|34 } Uterque Factor cum tribus locis parti-
47|5 } um decimalium.

290170 }
406238 } Particulares facti.
232136 }

27566|150 Summa sive factus totalis, cum tribus locis abscissis pro decimali fractione.

Hujus operationis ratio petenda est à notis in sect. 3. cap. 2.

Alterum exemplum simile,

58|73 } Factores cum duobus locis partium de-
600 } cimalium.

0000 } Particulares facti in suis locis.
0000 } Si numerus sit multiplicandus per cir-
35238 } culum nihil efficietur; veruntamen lo-
ci ratio habenda est.

35238|00 Summa sive factus totalis cum duobus locis abscissis.

3. Quo-

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 11

3. Quoniam per cyphas nihil efficitur, ut jam diximus, satis erit si quæ ad dextram factorum sunt, tandem facto totali ex integris addantur, ita,

358 } Factores cum duabus cyphis ad dex-
600 } tram unius eorum.

214800 Factus totalis cum duobus circulis additis.

Multiplicatio est intellectu satis facilis, sed quando Factores sunt magni, ejus operatio tedium parit; quod tamen in quibusdam casibus (indicum ope) multo levius erit; ut ergo modum operandi per indices planum faciam, ita accipe,

Factores } 23457892011324
6783221222222

| | |
|-----------------------|-----------------|
| 14 particulares facti | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 23457892011324 |
| | 46915784022648 |
| | 46915784022648 |
| | 70373676033972 |
| | 187663136090592 |
| | 164205244079268 |
| | 140747352067944 |

Fact. totalis 1591200709198095647228441928
Vides

12 Oughtredus explicatus, sive,

Vides hic numerum ex 28 figuris constantem, molestis satis Multiplicatione productum; quo ergo artificio (si fieri possit) habuero octo primas figuras, sc. 15912007 — quæ meo forsitan proposito abunde satisfacere possint, omissis 20 ultimis? Sane id commode fieri potest ope Indicum; neque opus erit laboriose percurrere singulas Factorum figuras. Regula est in Multiplicatione, Index cuiusque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum Multiplicatæ & Multiplicantis: ne hæseris in verborum ambiguitate, scire debes, quod quilibet e quatuordecim factis, quos particulares appellavimus, constat etiam ex 14 factis particularibus, quorum uniuscuiusque locus ab Indicibus erit manifestatus per regulam jam descriptam: quod vicesima prima figura facti totalis stare debet sub Indice 20 est nimis manifestum.

Repete igitur eosdem Factores cum Indicibus, ita,

| Indices | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | | | | |
|----------|------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------------|---|---|------------|---|---|---|---|---|---|----|----|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | 9876543210 | | | | | | | | | | | | | | |
| Factores | $\begin{cases} m \\ n \end{cases}$ | | | | | | | | | | | | | | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 20 | 11 | 3 | 2 | 4 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 6 | 7 | 8 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | | | | | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| | | | | | | | | | | | | | | | 2 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | 46 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | 469 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | 7037 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | c 187663 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | b 1642052 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | a 14074735 | | | | | | | | | | | |

— Puncta hæc primis figuris
 — appofui, quia vix utimur
 reliquis, nifi forte una fu-
 perioris Factoris pro in-
 cremento, quod animis fu-
 is fervare vel afportare ju-
 bentur tyrones.

— Puncta hæc primis figuris apposui, quia vix utimur reliquis, nisi forte una superioris Factoris pro incremento, quod animis suis servare vel asportare jubentur tyrones.

Summa 15912004 Octo primæ figuræ facti totalis nisi quod

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 13

quod in 4 sub asterisco deest generale incrementum, viz. 3. Index numeri 6 in n est 13, & index numeri 9 in m est 7; qui indices additi sunt 20: ideoque quia 6 in 9 facit 54, qui una cum incremento 1 (quod asportavi à figura 2 ante 9) est 55; scribe igitur 5 mox supra asteriscum, sub indice 20: & porta 5, multiplicando, ut soles reliquas figuras m , per 6, ut habeatur a ; pro b , quoniam index 7 in n est 12, & index 8 in m est 8; qui indices additi sunt 20: dic ergo ex 7 in 8 fit 56: hic autem cave ne scribas 6 supra asteriscum; quia habita ratione incrementi quod suppediatur à multiplicatione 7 in n per 9 in m , seivares in memoria 6, quibus additis ad 56, datur summa 62: scribe ergo 2 supra asteriscum, & porta 6, multiplicando, ut soles reliquas figuras m , per 7; ut habeatur b .

Tum si multiplices 8 in n per 7 in m , una cum incremento portato, viz. 7, fiet 63; scribe 3 supra asteriscum; & porta 6; multiplicando reliquas figuras m , ut soles per 8; ut habeatur c .

Pro reliquis, duc 3 in 5, tum 2 in 4, tum 2 in 3, tum 1 in 2; ut indices (qui additi faciunt 20) requirunt: ita tandem ex horum factorum (ope indicum inventorum) summa: habes octo primas figuras, omissis 20; quod si figuræ punctatæ 6783221 contrario ordine positæ fuissent indices ex seipsis convenissent, ita ut superiorum quilibet, cum suo inferiore correspondente fecisset 20, nempe ita,

| | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|-----------------------------------|
| | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7. | Indices. |
| 20. | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | Figuræ punctatæ ordine contrario. |
| | 1 | 2 | 2 | 3 | 8 | 7 | 6 | |
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13. | |

Et

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 13

quod in 4 sub asterisco deest generale incrementum, *viz.* 3. Index numeri 6 in *n* est 13, & index numeri 9 in *m* est 7; qui indices additi sunt 20: ideoque quia 6 in 9 facit 54, qui una cum incremento 1 (quod asportavi à figura 2 ante 9) est 55; scribe igitur 5 mox supra asteriscum, sub indice 20: & porta 5, multiplicando, ut soles reliquas figuras *m*, per 6, ut habeatur *a*; pro *b*, quoniam index 7 in *n* est 12, & index 8 in *m* est 8; qui indices additi sunt 20: dic ergo ex 7 in 8 fit 56: hic autem cave ne scribas 6 supra asteriscum; quia habita ratione incrementi quod suppedatur à multiplicatione 7 in *n* per 9 in *m*, servares in memoria 6, quibus additis ad 56, datur summa 62: scribe ergo 2 supra asteriscum, & porta 6, multiplicando, ut soles reliquas figuras *m*, per 7; ut habeatur *b*.

Tum si multiplices 8 in *n* per 7 in *m*, una cum incremento portato, *viz.* 7, fiet 63; scribe 3 supra asteriscum; & porta 6; multiplicando reliquas figuras *m*, ut soles per 8; ut habeatur *c*.

Pro reliquis, duc 3 in 5, tum 2 in 4, tum 2 in 3, tum 1 in 2; ut indices (qui additi faciunt 20) requirunt: ita tandem ex horum factorum (ope indicum inventorum) summa: habes octo primas figuras, omissis 20; quod si figuræ punctatæ 6783221 contrario ordine positæ fuissent indices ex seipsis convenissent, ita ut superiorum quilibet, cum suo inferiore correspondente fecisset 20, nempe ita,

| | | | | | | | | | |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|-----|------------------------|
| 20. | { | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7. | Indices. |
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | Figuræ punctatæ ordine |
| | | 1 | 2 | 2 | 3 | 8 | 7 | 6 | contrario. |
| | | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13. | Indices corresp. |

Et

14 Oughtredus explicatus, *sive*,

Et reliquæ septem figuræ, si adscriptæ fuissent ordi-
ne contrario, perrexissent ad indicem 20, ita,

20.19.18.17.16 15 14 13 12 11 10 9 8 7. Indices.
2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 3 8 7 6. Figuræ
punctatæ ordine inverso.

Vides autem, attendendo ad indices, te habere
15912004, primas octo figuras producti totalis, om-
missis ultimis 20; sed profecto non accurate; quia à
subsequentibus portari debuissent 3; ideóque debuisti
habere 15912007: & forsan plus portari potuisset in
aliis exemplis; sed quod ad computationem attinet per
sinus naturales & tangentes, cujus gratia hæc operatio
fuit instituta, res erit satis accurata; quanquam tacere
non debeo quod nos jam hoc labore levati sumus, ut-
pote qui computare solemus per sinus artificiales sive
logarithmos, magno cum reipublicæ mathematicæ emo-
lumento: nos autem hæc hæctenus ut veram ideam hu-
jus operationis, cujus contemplatio non est injucunda,
habeas, &, ut authorem intelligas, etiam fusius expo-
nimus.

| | | |
|-------------------------|-----------|--------------------------|
| Indices | 210 123 | |
| Factores | 246 914 | |
| | 7253 | Figuræ ordine contrario. |
| Indices correspondentes | 2101 | |

| | | | |
|-------------------------|--------|---|---------------------|
| In hoc exemplo index | a 7407 | } | Facti particulares. |
| quilibet suo correspon- | β 1235 | | |
| denti additus dat o | γ 49 | | |
| | δ 17 | | |

8708 Summa five factus to-
talis purus à partibus.
Pro

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 15

Pro α dic ex 3 in 9 fit 27; pinges 7, & portabis 2, ut solet, &c.

Pro β dic ex 5 in 6 fit 30; adde 5 pro incremento ex 5 in 9, figuram subsequentem, & fit 35; pinges 5, & portabis 3, ut solet, &c. Dices ex 5 in 9 fit tantum 45; ergo portare debui tantum 4.

Respondeo, Quia 45 tam prope accedit ad 50 quam ad 40 portabis 5.

Pro γ dic ex 2 in 4, una cum 1 pro incremento, fit 9, &c.

Pro δ , ex 7 in 2, una cum 3 pro incremento, fit 17.

Secundus casus male pingitur in nostro codice, debuit enim figura 5 quæ in loco unitatis, poni non sub 4, sed uno loco ulterius versus dextram; sub indice 4, ita,

$$\begin{array}{r} 210 \overline{12345} \\ 246 \overline{914} \end{array}$$

Indices.

$$\begin{array}{r} 72 \overline{53} \\ 2101 \end{array}$$

Figura ordine contrario.
Indices correspondentes
quorum quilibet suo superiori additus efficit 4.

Facti par- β }
ticulares γ }
 δ { $\begin{array}{l} 74074200 \\ 12345700 \\ 493828 \\ 172840 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 8708 \overline{6568} \end{array}$$

Factus totalis cum 4. locis partium.

Pro α dic ex 3 in nihil fit 0, &c.

Pro β dic ex 5 in nihil fit 0, &c.

Pro γ dic ex 2 in 4 fit 8, &c.

Pro δ dic ex 7 in 1, una cum 3 pro incremento, fit 10;
scribe 0, &c. In

16 Oughtredus explicatus, five,

In tertio casu penultimus factus 63 debuit esse tantum 56; & summa 32260, nisi plus illi accreverit ex amputatis figuris, quod fieri posse supra ostendimus.

In quarto casu, & ultimo facto, $\begin{array}{r} 25 \\ 2 \end{array}$
pro 16 portatis, scribis 2, ita, $\begin{array}{r} 25 \\ 2 \end{array}$
quia 16 propius accedit ad 20 quam ad 10.

6. Multiplicatio speciosa connectit utramque magnitudinem propositam cum nota in vel x, vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur unica littera: & hoc longe melius, scilicet ut scribas potius AE quam A in E vel A x E.

Si signa sint similia, ut +A multipl. per +E, vel —A per —E, producta magnitudo erit affirmata; nempe +AE, five AE, per 11 Sect. 1 Cap. Sed si signa sint diversa, ut +A per —E, producta magnitudo erit negata, nempe —AE, quippe + & — sunt signa diversa.

Effertur autem Multiplicatio per in, ut si dicam, A in E volo ut multiplicetur A per E, quod fit tantum jungendo literas, ita, AE.

Aq significat A quadratum, Ac A cubum, Aqq A quadrato-quadratum, Aqc A quadrato-cubum; & vocantur Potestates.

Multiplica A—E per B, factus erit BA—BE, nam ex Bin A fit BA, quia signa sunt similia, & ex B in —E fit —BE, quia signa sunt diversa: at ex —B in —E fit +BE.

Unaquaque species multiplicandi debet multiplicari per unamquamque Multiplicatoris; ex A +E in A +E fit Aq + 2 AE + Eq: nam ducatur A + E in 5e, five qua-

quadretur ita, duc A + E. A inferior ducatur tum in A tum in E superiores.
in A + E. dein E inferior ducatur tum in A tum in E superiores.

$$\begin{array}{l} \text{Aq} + .1.\text{AE} \\ \text{.1.AE} + \text{Eq.} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Aq} + .1.\text{AE} \\ \text{.1.AE} + \text{Eq.} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Particulares} \\ \text{facti.} \end{array}$$

$$\text{Aq} + 2 \text{AE} + \text{Eq.} \text{ Factus totalis.}$$

Et nota quod nihil interest five hæc five illa species ordinem ducat; modo signa illaſa manent, potes ſcribere, ſi placet, $\text{Eq} + 2 \text{AE} + \text{Aq}$, vel $\text{Eq} + 2 \text{EA} + \text{Aq}$; ſic ſi multiplicares $A \times B$ per $C \times D$, five AB per CD ; potes pro producto ſcribere vel $ABCD$ vel $DCBA$ vel $CDA B$; juxta hanc formam ſi multiplicares 3 A per 2 A, ſcribere deberes (jüngendo) ita, 3A 2A vel 32 AA, id eſt, $3 \times 2 \times A \times A$: ſed quoniam gravis error hoc pacto facile oriri poſſet; nempe putares numerum 32 ſignificare triginta duo, ſed valet tantum ſex, id eſt, 3×2 ; ideoque quoad figuras numerales adempta eſt hæc licentia, eas jungendi ad eum modum quo fit in ſpeciebus; ergo multiplicare debes figuras ut ſolet; & ex 3 A in 2 A fiet 6 AA five 6 Aq: ſic ex 12 B in 4 B fit 48 BB five 48 Bq ex 5 B in 3 C fit 15 BC ex 5 AE in 5 AE fit quadratum 25 AEAE five 25 AAEE five 25 Aq Eq quod uſitatus.

Secundum *Carteſium* ex A in A fit AA five Aq five A^2 eſt enim 2 index quadrati, ut ante diximus.

ex A in Aq fit Ac five A^3 , nempe 3 eſt index cubi.

ex A in Ac fit Aqq five A^4 .

ex A in Aqq vel ex Aq in Ac fit Aqc five A^5 , &c. & ſane longe præſtat ſcribere A^5 breviter quam AAAAA.

C

Quar-

Quandoque coactus eris exprimere unam magnitudinem per duas literas A—B, ut unam lineam per AB, & tum connectere debes magnitudines per notam in vel x, ut multiplica AB per CD, factus erit AB in CD vel AB x CD.

CAP. V. De Divisione.

1. **Q**uotus appellatur Parabola, nomine à Diophanto antiquo & egregio analysta accepto; quia ex adplicatione oritur; ut adplica rectangulum 12 ad longitudinem 4, oritur latitudo 3.

| | | | | |
|---|--|----|--|--|
| | | 4 | | |
| | | | | |
| 3 | | 12 | | |
| | | | | |

2. In dividendo incipere debes ad sinistram, sed non debes subscribere Divisorem 297 ita $\frac{187}{297}$, &c. — quoniam 2 non omnino continetur in 1 ideoque 187 non est Dividendus sufficiens Divisori; sed ita $\frac{187}{297}$, &c.

In dividendo duobus modis proceditur: quidam dividunt per lituras, Divisorem non subscribendo, sed subscriptum cogitando; ita,

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 89 \times 13 \times 7 \\
 \text{Divisor } 297) \overline{1871335675} \quad (630084 \frac{137}{297} \text{ Quotus.} \\
 \underline{178 \times 13768} \\
 89 \times 118
 \end{array}$$

Per

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 19

Per primam figuram in quoto 6 multiplica Divisor-
rem 297, & factum 1782, dividendo subscribe & sub-
trahe è correspondente parte dividendi 1871, cujus
reliquum 89 scribe supra; delens utrumque 1871, 1782.
quod tamen reliquum in proxima operatione & ipsum
delendum; sed nobis nunquam placuit hæc via delendi,
quin præstat potius singulas operationes clare habere
ante oculos, ut fit in eodem exemplo repetito, ubi Divi-
sor semper exprimitur, qui modus etiam intellectu est
longe facilior; ejus regulæ in his paucis carminibus
breviter continentur.

Ad lavam incipies, reliquas punctato figuras:

ita 187135075
297

1. Quæres: 2. Responsumque datum scribe in quotiente.
 3. In divisorem ducas: 4. Tum subtrahe factum.
 5. Altera descendat nota: 6. Divisor moveatur.
 7. Si frustra sic cyphra quoto: 8. Fiat numerator
- Qui superest numerus, cui Divisor dato nomen.*

Quot fuerint puncta tot erunt figuræ in quotiente.

20 Oughtredus explicatus, sive,
 Dividendus 187135075 (630084¹³⁷₂₃₇) Quotus.
 Divisor 297

a 1782

b 893 Reliquum dividendi.

c 297 Divisor motus.

d 891

e 2507 Reliquum dividendi.

297 Divisor motus frustra bis.

f 2376

g 1315 Reliquum dividendi.

297 Divisor motus.

b 1188

127 Reliquum divid. in quo Divi-
 sor ne semel continetur.

Quæres quoties 2 in 18, responderetur 6, quam figu-
 ram scribe in quotiente: responderetur inquam 6, nam
 quanquam 2 sit in 18 novies, non debes tamen scribe-
 re 9, quia reliquæ figuræ non consentient: non est e-
 nim 9 media figura Divisoris toties in 7, nempe in
 tertia figura dividendi, tum ducas responsum 6 in Divi-
 sorem, & fit a.

Hoc factum, subtrahe ex dividendo, restat reliquum
 dividendi 89 in b: tum descendat prima figura puncta-
 ta, nempe 3 ad b; & punctum, si placet, memoriæ cau-
 sa, deleas; tum Divisor moveatur uno loco propius
 ad dextram, ut vides in c.

Jam novam Divisionem institue, operationes repe-
 tendo; & primum quæres quoties 2 in 8; responde-
 tur

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 21

tur 3; responsum 3 scribe in quotiente, ut vides; tum ducas 3 in Divisorem, & factum (*d*) tolle ex *b*, nempe reliquo dividendi restabit 2 prima figura in *e*, descendat altera nota 5, Divisor moveatur, & quoniam motus ne semel continetur in 25; fit cyphra quoto, & descendat 0, & moveatur Divisor, & quoniam iterum frustra, neque enim adhuc semel continetur 297 in 250, pone alteram cyphram in quoto, & descendat 7, & Divisor moveatur.

Tum quares quoties 2 in 25, respondetur 8, quod scribe in quoto, & duc 8 in Divisorem, fiet *f*, quo sublato ex *e*, restat 131 in *g*, cui descendens addatur ultima figura 5; & Divisore moto, quares quoties 2 in 13, respondetur 4, quo posito in quotiente, & mox ducto in Divisorem, fit *h*, quo sublato ex *g*, restat 127, qui numerator erit fractionis, cujus Denominator erit Divisor; ita, $\frac{127}{250}$.

Quod si fractionem decimalem habere velles, adde cyphras Numeratori quot libuerit, & perge per regulas antedictas dividendo per Divisorem sive Denominatorem, ut fit in hoc exemplo,

Divisor cum 3. $3 \overline{) 60004320}$ 765 Dividend. cum 3.
cyphris omissis } figuris abscissis.

720 | 1275 Quotiens cum decimali fractione.

3. Propter tres cyphras omissas & totidem figuras abscissas dividis per unam solummodo figuram 6, & quotientem dividendo subscribis: in fine autem divisionis circuli supponuntur addi figuris abscissis, ita, 7650, & divisio continuanda per 6, propter decimalem fractionem, nempe $\frac{1275}{6}$, vel figuræ abscissæ restituendæ

C 3

pro

pro Numeratore, & omisso circuli pro Denominatore;
ita, $720\frac{765}{6000}$.

8. Dividas per numerum irrationalem; ita,

17

383

2883c

119938a reliq. divid.

Divisor irration. $357\overline{)092\ 6425}$ 467823 (130780

Quare quoties 3 prima
figura Divisoris in 4, re-
spondetur 1; scribe 1 in
quoto & duc in Divisorem;

357893 Divisor irrat.

187127b

2588d

288e

sed quoniam 1 nihil mutat, mox tolle Divisorem ex di-
videndo restabit a; jam amputabis 3, ultimam figuram
Divisoris; & quare iterum quoties 3 prima figura Di-
visoris est in 10 in a, respondetur 3; scribe 3 in quoto
& duc 3 in Divisorem jam amputatum, dicendo ex 3 in
9 fit 27, &c. pro b, tolle b ex a restat c, viz. 2803.

Jam amputabis 9 à Divisore & quares, sed quoniam
Divisor subintelligitur frustra moveri, scribe cyphram
in quoto atque amputabis cyphram in Divisore; tum
iterum quares quoties 3 in 28, sc. in c, respondetur 7,
scribe 7 in quoto & duc 7 in Divisorem multatum jam
tribus figuris, & dic ex 7 in 7 fit 49, sed quia 49 pro-
pius accedit ad 50 quam ad 40, scribe 0, & portabis
5, &c. pro d, tolle d ex c restat 303; jam amputabis 7
in Divisore & quare quoties 3 in 30, respondetur 8;
scribe 8 in quoto & duc 8 in Divisorem amputatum,
id est, in 35, & dic ex 8 in 5 una cum 6 pro incremen-
to ex 8 in 7 fit 46, scribe 6, &c. pro e, tolle e ex 303 re-
stat 17; tum amputabis 5 & quatum satis amplum habes.

Modus

Modus dividendi per indices satis innotescit ex iis quæ diximus in priore Capite.

Diviso speciosa.

Si AE Dividatur per A quotiens erit E, expuncta solummodo magnitudine A.

Sed si A dividatur per A expungetur quidem A, sed quotiens erit 1, nam A est semel in seipsa, sic 10 est semel in 10.

Si —AE dividatur per —A oriatur E, quia signa sunt similia: si +AE per —A oriatur —E, quia signa sunt diversa.

Si BCDFG dividatur per B oriatur CDFG expungendo B utrobique: si per C dividatur oriatur BDFG delendo C utrobique: si per BCD oriatur FG delendo BCD utrobique.

Quod si Divisor nullas habuerit easdem literas five species communes cum dividendo non potest divisio aliter fieri quam per lineolam interjectam; sic divide AB

per CD oritur $\frac{AB}{CD}$

Quoniam multiplicando ex AA five Aq in BA fit BAAq five Bac, id est, BA cubus, quæ magnitudo fit etiam ex B in Ac, atque etiam ex A in BAq, ideoque vice versa si BAc dividatur per Aq oriatur BA; si per B oriatur Ac; si dividatur per BAq oriatur A; si BAc dividatur per BAc oriatur 1; Nam quod multiplicatio conficit Divisio dissolvit.

Si divides BA—CA per B—C: quoniam adplicando BA ad B oritur A, atque eadem A oritur adplicando —CA ad —C quotiens erit tantum A non A+A, ut forsitan putares: sic

adplica $AB+AC+AD+AE+AF$ ad $B+C+D+E+F$

oritur tantum A : oritur inquam tantum A , ut vice versa per multiplicationem facile explorare potes.

Ideoque si videris unam aliquam speciem, ut A in hoc exemplo in omnibus speciebus, ut $AB+AC$, &c. potest fieri omnium ad illam speciem adplicatio, vel ad magnitudines in quas illa species ducitur, ut fit in exemplo.

Quod si una aliqua species ducatur in plures, ut in exemplo priori : & præterea aliqua alia species vel duæ alia, &c. ducantur in easdem, potest fieri omnium adplicatio vel ad has easdem vel ad illas quæ in has easdem ducuntur : adplica

 $AB+AC+AD+AE+AF+BB+BC+BD+BE+BF$ ad $B+C+D+E+F$ oritur $A+B$.

In hoc exemplo vides A ductam in $B+C+D+E+F$, atque in easdem ducitur & B ; ergo potest fieri adplicatio vel ad easdem $B+C+D+E+F$, & orietur $A+B$, ut fit in exemplo : vel potest fieri divisio per $A+B$, & orietur $B+C+D+E+F$.

Est quidem modus elegans inveniendi omnes Divisores per quos ulla magnitudo potest dividi—*Francisci à Schooten, principio Math. Universalis*, p. 31. lin. 34. dividantur datae quantitates per—p. 33. lin. penult. a^3bc — ab^3c . quia 5 est quinquies in 25, ideo dividendo 25 AB per 5 A oritur 5 B .

Potes

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 25

Potes vulgaris Arithmeticae vestigia premere & juxta regulas jam supra expositas quamcunque magnitudinem dividere.

Ut divide $Aq+2AE+Eq$ ($A+E$ Quotiens.

per $A+E$.

Quæres quoties A in Aq , respondetur A , scribe in quoto & duc A in divisorem $A + E$, fit $Aq + AE$; subtrahæ factum ex dividendo juxta regulas Subtractionis antea expositas & erit reliquum dividendi $Aq+2AE+Eq - Aq - AE$, hoc est,

$AE+Eq$ Reliquum dividendi.

$A+E$ Divisor.

Jam repete operationem, & quære quoties A in AE , respondetur E , scribe E in quotiente, & duc E in Divisorem, fit $AE+Eq$, quo sublato ex reliquo dividendi, nihil restat.

Divide cubum per ejus latus : nempe,

adplica $Ac+3AqE+3AEq+Ec$ ($Aq+2AE+Eq$.

ad $A+E$.

Quære quoties A in Ac , respondetur Aq , scribe Aq in quoto, & duc Aq in Divisorem, fit $Ac+AqE$; tolle factum ex dividendo restat

$2AqE+3AEq+Ec$ Reliquum dividendi.

$A+E$ Divisor.

Quære quoties A in $2AqE$, respondetur $2AE$, scribatur $2AE$ in quoto, & ducatur etiam in Divisorem, fit $2AqE+2AEq$; tolle factum ex residuo dividendi restabit

AEq

26 *Oughtredus explicatus, five,*
 $A\text{Eq} + \text{Ec}$ Reliquum dividendi.

$A + E$ Divisor.

Quare quoties A in $A\text{Eq}$, respondetur Eq , scribe Eq in quoto, & duc Eq in Divisorem, fit $A\text{Eq} + \text{Ec}$; quo facto sublato ex reliquo dividendi, nempe $A\text{Eq} + \text{Ec}$, restat nihil, & Divisio perficitur.

Rogabis, Quare non potui in hac ultima operatione querere quoties E altera pars Divisoris in $A\text{Eq}$, quandoquidem E vult dividere $A\text{Eq}$, nempe oritur AE , & nihil refert quo ordine species scribantur, five $A + E$ five $E + A$, uti prius monitum.

Respondeo, Quia A altera pars Divisoris noluit dividere etiam & Ec ; & hoc est nihil aliud quam quod in vulgaribus numeris observare edoctus es; ubi requiritur ut Dividuum sit sufficiens Divisori.

Potuisses quidem incipere si voluisses cum E , dividendo Ec per E pari successu.

Quod si hac magnitudo composita dividenda fuisset, nempe $\text{Ac} + 3\text{AqE} + 3\text{AEq} + \text{Ec} + \text{Bc}$

per $A + E$.

Primum extrahe quotientem $\text{Aq} + 2\text{AE} + \text{Eq}$, ut ante, sed quoniam magnitudo non est ulterius divisibilis, fractio erit apponenda, cujus Numerator erit Bc , & Divisor $A + E$, Denominator

sic divide $\text{bb} + \text{bc} + \text{AE}$

per $b + c$

quia ex $\text{bb} + \text{bc}$ ad $b + c$ oritur b , non potest autem AE dividi per $b + c$; ideo quotus exprimitur cum fractione, ita, $b \frac{+ \text{AE}}{b + c}$

CAP.

CAP. VI. De Proportione.

1. **S**I è quatuor numeris datis, primus ita se habeat ad secundum ut tertius ad quartum; dicuntur quatuor illi numeri proportionales geometrica proportionem, quæ consistit in æqualitate rationum, vel in eadem numerorum ad se invicem habitudine, numeri geometricè proportionales significantur quatuor punctis (::) ita $7.9::28.36$.

2. Multiplicatum 7 tum 9 per eundem 4. facti, viz. 28. 36. erunt multiplicatis, viz. 7.9. proportionales per 18. 7. elem. $7.9::28.36$.

Habitudo inter duos numeros appellatur Ratio; inter plures Proportio vocatur; in hac Proportionem ratio est utrobique eadem, sc. eadem est ratio 7 ad 9 quæ 28 ad 36; ratio autem invenitur dividendo antecedentem per consequentem, ut adplica antecedentem 7 ad consequentem 9, ita, $\frac{7}{9}$, hoc est, $1\frac{2}{9}$, & appellatur hæc ratio sub-super-bi-partiens septimas; ita etiam adplica 28 ad 36, five $\frac{28}{36}$, hoc est, $1\frac{2}{9}$, five $1\frac{4}{9}$; vel fractionem adhuc ulterius abbreviando $1\frac{2}{9}$, etiam ratio est subsuperbipartiens septimas.

At ratio 31 ad 7, $3\frac{1}{7}$, hoc est, $4\frac{4}{7}$ est quadrupla supertripartiens septimas; quæ ut plenius & planius intelligantur sciendum quod ratio five numerorum habitudo est vel æqualitatis, ut 4 ad 4, vel inæqualitatis; estque hæc inæqualitatis ratio vel majoris inæqualitatis, ut 8 ad 4, vel minoris, ut 4 ad 8.

Habitudo majoris inæqualitatis in 5 genera distribuitur, scil. multiplicem, superparticularem, superpartientem;

entem : multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem: pariter habitudo minoris inæqualitatis, singulis vocabulis præposita præpositione sub; ut sub-multiplicem, sub-superparticularem, &c.

1. Multiplex est quando major minorem aliquoties continet, ut bis ter, &c. sine fractione, sic 12 est in ratione duodecupla ad 1, sextupla ad 2, quadrupla ad 3, tripla ad 4, dupla ad 6; & minor est pars aliquota majoris, nempe 6 est in 12 bis, sine fractione.

2. Superparticularis est quando major minorem semel duntaxat continet & insuper unam ejus partem aliquotam. sc. dimidiatam, tertiam, quartam, &c. si pars aliquota sit dimidiata $\frac{1}{2}$, ut 3 ad 2, $\frac{3}{2}$, hoc est, $1\frac{1}{2}$ dicitur sesquialtera; est autem 4 ad 3 $\frac{4}{3}$, hoc est, $1\frac{1}{3}$ sesquitercia; 5 ad 4, five $1\frac{1}{4}$ sesquiquarta, &c. est etiam 1001 ad 1000 $1\frac{1}{1000}$, five $1\frac{1}{1000}$ sesquimillesima: atque hic in fractione Numerator semper est unitas.

3. Superpartiens est quando major minorem semel duntaxat continet & insuper aliquot ejus partes aliquotas, ita tamen ut illæ non efficiant unam aliquotam; sic 8 continet 5 semel & insuper tres unitates, quarum quælibet est pars aliquota utpote quinta hujus numeri 5; ipse autem ternarius, ex illis compositus, non est pars una aliquota numeri 5, id est, non vult dividere 5 sine fractione: vel breviter, quando major minorem semel duntaxat continet cum fractione, cujus Numerator non erit unitas, ita 7 ad 5, five $\frac{7}{5}$, hoc est, $1\frac{2}{5}$, est adhuc subdistinguendo super-bipartiens quintas, $\frac{7}{5}$, $1\frac{2}{5}$ est supertripartiens quintas, $\frac{7}{5}$, $1\frac{2}{5}$ est superquadrupartiens quintas, &c. $\frac{11}{5}$, hoc est, $1\frac{6}{5}$ est superdecupartiens undecimas; sic $\frac{13}{5}$ five $1\frac{8}{5}$ est superdecupartiens decimas quintas.

4. Multi-

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 29

4. Multiplex super-particularis est quando major minorem aliquoties continet, ut bis ter, &c. & præterea unam ejus partem aliquotam; sic 9 ad 4, $\frac{2}{3}$, hoc est, $2\frac{1}{3}$, unde quasi componitur ex multiplici & particulari.

5. Multiplex superpartiens est quando major minorem aliquoties continet & aliquot ejus partes aliquotas non efficientes unam aliquotam, vel unitas nequit esse in fractione; sic 11 ad 3, $\frac{11}{3}$, five $3\frac{2}{3}$; ita 11 ad 3 est ratione tripla superbipartiente tertias, & in exemplo Authoris $\frac{31}{7}$, five $4\frac{3}{7}$; 31 est ad 7 in ratione quadrupla supertripartiente septimas; unde hæc ratio quasi componitur ex multiplici & superpartiente.

3. Si quatuor numeri sint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis, ut 7.9 :: 28.36. = est nota æqualitatis: $9 \times 28 = 7 \times 36$; hoc theorema merito catholicum appelletur, cujus usus ubique est insignis: demonstratur autem 19. 7. elem. nam si sit 7.9 :: 28.36. quoniam 28 & 36 fiunt ex 7 & 9 multiplicatis per 4 erg. per expositionem, ut 7.9 :: 7x4. 9x4. ergo factus ex mediis $9 \times 7 \times 4$ necessario æquabitur facto ab extremis, nempe $7 \times 9 \times 4$.

Pulchre in speciebus si sit B.C :: BA. CA, ex mediis C in BA fit CBA, ab extremis B in CA fit BCA; sed erit necessario CBA=BCA.

4. Hinc si 4 habuerint 8, quæritur quot habuerint 10?

5. Duc per auream regulam 8 in 10, & factum divide per 4, hoc est, $\frac{80}{4} = 20$ quoto, qui est quartus proportionalis, scil. ut 4.8 :: 10.20.

Continua Proportio significatur per hanc notam \therefore ; sic 1. 2. 4. 8. 16. &c. \therefore sunt continuè proportionales, nempe

30 Oughtredus explicatus, five,

nempe ut 1 ad 2 ita 2 ad 4, & ut 2 ad 4 ita 4 ad 8, &c.

8. In speciebus $a. \beta. \frac{\beta q}{a} \frac{\beta c}{a q}$ &c. sunt \therefore , id est,

continue proportionales; nam ut $a. \beta :: \beta. \frac{\beta \beta}{a}$ five $\frac{\beta q}{a}$,

sed quia adhuc non didicisti multiplicare fractiones, reliqua differenda ad Cap. 10.

In hac serie si ultimus terminus sit w , & summa omnium terminorum progressionis designetur per Z , erit $Z - w$ summa omnium antecedentium, & $Z - a$ summa omnium consequentium: & esto per 12. 5. elem.

10. $a. \beta :: Z - w. Z - a$. ergo per theorema catholicum $aZ - aq = \beta Z - \beta w$. ab utraque parte aequationis tolle

aZ erit $-aq = \beta Z - \beta w - aZ$. utrique parti adde βw

erit $\beta w - aq = \beta Z - aZ$. divide utramque per $\beta - a$

erit $\frac{\beta w - aq}{\beta - a} = Z$. atque ita vides quomodo ex tribus

datis, nempe $a. \beta. w$. eruitur summa omnium terminorum in progressionem geometrica. Hac planius intelligas Cap. 11.

Hac de geometrica proportionem utilissima sunt ad investigationem analyticam anatocismi vel usuræ compositæ in calce libri: sciendum autem, quod, quoniam ratio annui fœnoris jam mutatur, loco $19\frac{1}{2}$ id est, $19^d. 1\frac{1}{2}$, pro una libra per annum reponend. $14\frac{1}{16}$ id est, fere $14^d. ob.$ & loco $1\frac{1}{16}$ ratio solidorum erit $1\frac{1}{16}$.

Et loco analogiæ $100. 108 :: 1. 1\frac{1}{8}$

analogia erit $100. 106 :: 1. 1\frac{1}{16}$

Et Logar. $1\frac{1}{16}$ est $0,02530$.

Nota, quod in incremento unius libræ elocatz pro certo

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 31

certo annorum numero, progressio est per singulos annos geometrica : ideoque *βω.* procreabitur ex 1^{li.} elocata pro certo annorum numero,

nempe ut 1. 2 :: 2. 4. &c.

fic 1. 1|06 :: 1|06 ad aliud, &c.

Th. 1. Juxta hanc methodum & 1. Theor. computavi, quod una libra elocata ann. 21. dabit in annorum fine 3^{li.} 1^{ss.} 13^{ss.} pro an. 30. 5^{li.} 43

Th. 3. Et (una libra per annum) intermissa 21. annos, dabit 39^{li.} 1^{ss.} 13^{ss.} pro an. 30. 79^{li.} 05

Th. 5. Et emptor unius libræ per ann. pro 21. an. deponet in pecuniis numeratis 11^{li.} 76 pro an. 30. 13^{li.} 76

9. Sectio nona Authoris demonstratur ab *Enc.* 5. & 7. Elemen.

10. Si binarum rationum, *scil.* 7 2 consequentes sint æquales, nempe 1=1, sunt ut antecedentes, *viz.* 7 ad 9 : si vero antecedentes sint æquales (ut in 1 2 antecedentes, *scil.* 1 & 1 sunt æquales) sunt reciproce ut consequentes, hoc est, non ut 9 ad 7, sed ut 7 ad 9.

nempe ut 1 2 :: 7. 9.

15. Quoniam habitudo numerorum ad se invicem invenitur dividendo antecedentem per consequentem, ut adplicando 8 ad 4, oritur 2, hoc est, 2 ; quotus hic appellari solet denominator rationis, vel rationis quantitas ; etiam & ratio ipsa vocari possit ; sic B ad C ratio five denominator est $\frac{B}{C}$ ita BA ad A ratio est

$\frac{BA}{A}$ five B : etiam BA ad CA ratio est $\frac{BA}{CA}$ five $\frac{B}{C}$ uti satis patet ex legibus Divisionis supra expofitis.

Ideoq̃ue

32 Oughtredus explicatus, sive,

Ideoque vice-versa si duxeris quorum five rationem in consequentem, id est, divisorem, restituetur antecedens, quoniam quod divisio dissolvit multiplicatio conficit; ita ex 2 in 4 fit 8, ex $\frac{B}{C}$ in C fit B, ex $\frac{BA}{A}$ (five B) in A fit BA, ex $\frac{BA}{CA}$ (five $\frac{B}{C}$) in CA fit BA, ut planius infra intelliges.

Ostendit Oughtredus in Sect. 15. rationem antecedentis ad consequentem componi vel ex ratione antecedentis ad tertium & tertii ad consequentem, vel ex ratione tertii ad consequentem & antecedentis ad tertium $7.9 :: x \frac{7.A}{A.9}$ item $7.9 :: x \frac{A.9}{7.A}$.

Ratio ex rationibus componi dicitur quando rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem per quintam defip. sexti Elem. id est, cum rationes inter se multiplicatæ vel earum denominatores inter se multiplicati effecerint rationem; sic 4 est ad 2 in ratione dupla, denominator est 2; & 9 est ad 3 ratione tripla, cujus denominator est 3; ratio autem ex his rationibus composita, ex dupla in triplam fit sextupla; scil. ex 2 in 3 denominatoribus in se invicem ductis fit 6, denominator rationis sextuplæ; vel quoniam denominatores 2 & 3 ita exprimi possint, $\frac{4}{2} \frac{9}{3}$ ex $\frac{4}{2}$ in $\frac{9}{3}$ fit $\frac{36}{6}$, denominator rationis sextuplæ.

Hinc si ratio in eandem rationem (id est, in se) ducatur, facta erit illa ratio duplicata; sic rationis 8 ad 4, denominator est 2; ex 2 in 2 fit 4, denominator rationis quadruplæ; triplicetur hæc ratio multiplicando factum 4 iterum per 2 fiet 8, denominator rationis octuplæ; & ex 2 in 8 fit 16, quadruplicando, &c. ideoque

que in continue proportionalibus ubi ratio est eadem ut

$$\begin{array}{ccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \} \dots \\ 729 & 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \} \dots \end{array}$$

Prima 64 est ad secundam 32 in ratione dupla quæ est simpla; ad tertiam 16 in eadem ratione dupla duplicata; ad 8 in ratione dupla triplicata: siquidem 8 octies continetur in 64: ita 729 est ad 81 in ratione tripla duplicata, ad 27 in eadem ratione triplicata; unde apparet magnam esse differentiam inter rationem duplam & duplicatam, item triplam & triplicatam, ex. gr. 9 non est ad 1 in ratione dupla sed noncupla, est tamen 9 ad 1 in ratione 3 ad 1 duplicata, quia denominator rationis triplæ 3 in seipsum facit 9; neque semper duplicatur ratio, si multiplicetur per 2, ex. gr. 3 est ad 1 in tripla ratione; hujus dupla est sextupla, sed duplicata est quando dueitur tripla in seipsam, unde fit noncupla; sic etiam si ratio 3 ad 1, nempe tripla, tripletur, ut ita dicam, fit ratio tantum duplicata, sc. 9 ad 1 in ratione 3 ad 1, sed 27 ad 1 est in tripla ratione triplicata, id est, ex 3 in 3 fit 9, & ex 3 in 9 fit 27.

Demonstratio hujus rei pendet ex hoc generali Theoremate, quod ratio duorum quorumlibet numerorum componitur ex ratione antecedentis ad tertium, &c.

Ut sumantur ad libitum 20 & 5, sumatur etiam ad libitum quilibet numerus sive major alterutro 20 vel 5 sive minor nihil interest, sed planioris demonstrationis causa accipe 10.

Dico rationem 20 ad 5, quæ est quadrupla, componi ex ratione 20 ad 10, & ex ratione 10 ad 5; nam denominator rationis prioris est $\frac{20}{10}$ sive 2; etiam & posterioris $\frac{10}{5}$ sive 2; sed ex 2 in 2 fit 4 denominator ra-

D

tionis

tionis quadruplæ; sic ex $\frac{20}{10}$ in $\frac{10}{2}$ fit $\frac{200}{20}$, hoc est, 4.

Quod universaliter ita se habere, quidam demonstrarunt assumpto hoc principio, cujus veritatem hic supra ostendimus, viz. denominatorem rationis multiplicatum in consequentem producere antecedentem.

A ad C cujus denominator esto F; hæc ratio componitur ex ratione A ad B, cujus denomin. D; & ex B ad C, cujus denom. E; dico F componi ex D in E: nam ab assumpto principio $FC = A = DB =$ erg. $FC = DB$. erg. per 19. 7. $F.D :: B.C$; sed quoniam E est denomin. rationis B ad C, est etiam E denominator rationis F.D. ergo ab assumpto principio $DE = F$. quod erat dem. *Oughtredus* sic demonstrat, $7.9 :: 7 \times A. 9 \times A$ per 17. 7. & Sect. 2. hujus: sed ratio 7 A ad 9 A manifeste componitur, operante arithmetico, ex 7 ad A, cujus denominator $\frac{7}{A}$; & A ad 9, cujus denominator $\frac{A}{9}$ nempe ex $\frac{7}{A}$ in $\frac{A}{9}$ fit $\frac{7A}{9A}$ ut planius intelliges ad Cap. 10. & 7 A rectangulum est ad rectangulum 9 A, in ratione quæ ex lateribus componitur per 23. 6.

Item quoniam ut $7.9 :: 7A. 9A$. 7A ad 9A ratio componitur ex $\frac{A}{9}$ & $\frac{7}{A}$

Hinc in pluribus magnitudinibus, quot libuerit, ut A BCDE, erit ratio primæ A ad ultimam E composita ex A ad B, B ad C, C ad D, D ad E, quia, ut ante, A ad E componitur ex A ad D & D ad E; verum A ad D componitur ex A ad C & C ad D; quinetiam A ad C componitur ex A ad B & B ad C; ideoque ratio
A ad

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 35

A ad E componitur ex omnibus intermediis rationibus, & in continue proportionalibus, ut 1. 2. 4. 8. 16. 32. &c. ubi ratio est eadem, tertia ad primam composita erit ex ratione prima in se ducta, id est, duplicata quarta ad ad primam in eadem triplicata.

Ab eodem assumpto principio facile est speciose demonstrare Theorema catholicum, *sc.* factum ex mediis = facto ab extremis $A. B :: C. D.$ fit enim E rationis denominator ergo

$$EB = A \text{ \& } ED = C. \text{ erg. ut } EB. B :: ED. D.$$

sed $BED = EBD.$ quod erat dem.

Aq est in duplicata ratione radicis A ad 1, nam

$$\text{ex } \frac{A}{1} \text{ in } \frac{A}{1} \text{ fit } \frac{Aq}{1} \text{ id est } Aq.$$

Et quadrata sunt in duplicata ratione laterum, *sc.* Aq ad Bq, in ratione A ad B duplicata, nam ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{A}{B}$ fit $\frac{Aq}{Bq}$ ut planius ad Cap. 10. intelliges; nimirum horum quibusdam per anticipationem fere dictis.

16. Inventio quarti Proportionalis, &c.

Hic Clarissimus Author utitur sinubus naturalibus, multiplicando & dividendo juxta auream regulam, jam verò ad unum fere omnes utuntur sinubus artificialibus, id est, logarithmicis; nempe in analogia, logarithmi terminorum secundi & tertii adduntur, & si summæ subtrahatur logar. prim. restabit logarithmus quarti proportionalis; utile erit ad azymuthum, id est, distantiam solis à meridiano inveniendum exempla proponere, nempe maxima declinatio solis est 23°. 30'. plurimi

36 Oughtredus explicatus, sive,
 nuper statuerunt $23^{\circ}.31'$. Sed Astronomia Carolina
 mavult retinere $23^{\circ}.30'$.

Esto Sol in secundo gradu Tauri, id est, distans à
 puncto æquinoctiali proximo 32° . & esto solis altitu-
 do 40° . cujus complementum est 50 grad. fit denique
 poli elevatio $52^{\circ}.15'$. cujus compl. est $37^{\circ}.45'$. Vide
Wingat Astron. Probl. 15. in Appendice.

Probl. data solis maxima declinatione, una cum di-
 stantia solis à proximo æquin. puncto, invenire præsen-
 tem ejus declinationem: analogia erit rad. sin, dist
 :: sin, max, declin. sin, declin. præf.

ut rad. 90. 10,000000

ad sin. dist. 32. 9724210
 ita sin. max. decl. $23^{\circ}.30'$. 9600700 } addantur.

sin. præf. decl. $12^{\circ}.12'$. 9324910 ex hac sum-
 ma radius primo loco positus auterendus, sed non opus
 est ut subscribatur, satis est vel negligere vel obliterare
 primam unitatem, ut sinus quærendus in tabulis sit
 9324910 . viz. logar. $12^{\circ}.12'$. id est, declin. solis ab
 æquatore, quando sol est in secundo gradu tauri: dein-
 de eorum gratia quæ sequuntur ex 90 grad. tolle $12^{\circ}.12'$.
 viz. ex $89^{\circ}60'$.

tolle 12 12

rest. 77 48. Distantia solis à polo mundi.

Tum vide *Wingat*. ibidem, Probl. 27. ad azymuthum
 inveniendum per duas operationes.

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 37

| | | |
|---------------------------|---------|-------------|
| Ex datis cos. elev. poli, | 37° 45' | } addantur. |
| dist. solis à polo mundi, | 77 48 | |
| cos. alt. solis, | 50 00 | |

| | | |
|---------------------------|-------------|-------------------|
| summa trium, | 165 33 | |
| Ex semisumma, | 82 46. 30". | vel ex 81°. 106'. |
| tolle dist. à polo mundi, | 77 48. | tolle 77 48 |
| rest. differentia, | 4 58. | rest. 4 58 |

Prim. analogia erit ut rad. 10,000000
 ad compl. s. elev. 37°. 45'. 9 786905 } add.
 ita compl. s. alt. 50 9 884254

ad quartum finum 9 671159. sum.

Secund. anal. erit ut 4^{ms}. fin. 9 671159
 ad fin. semisumma 82. 46. 9 996530 } add.
 ita fin. differentia 4. 58. 8 937398
 ex hac summa 18 933928. sum. ex qua pri-

mus term. toll.
 tolle quartum finum 9 671159. 1^{mo} loco anal. posit.
 ad finum septimum 9 262769. rest.
 cui addatur radius 19 262769.
 hujus summa pars dimid. 9 631384. erit finus arcus
 cujus compl. duplus arcus est azymuthus quæsitus ab
 aquilone.

Quare igitur fin. 9631384 in tab. logar. ut vocabu-
 lum in Dictionario reperies eum respondere grad. 25.
 20. cujus dupl. viz. 50. 40'. est azym. ab austro ; &
 comp. 64. 40'. cujus dupl. 129. 20. est azym. ab aequi-
 lone,

Ut secunda operatio facilius perficiatur, jam uti solent complemento Arithmetico, quando rad. non est in primo loco analogiæ; est autem compl. Arithm. in quovis logarithmo, residuum ultimæ figuræ ad 10, & reliquarum omnium ad 9, quod corrente oculo elicitur.

Sic quarti sinus, nempe, 9671159.

Compl. Arithm. est 0328841. hoc complementum secundo & tertio terminis addendum, ut summa omnium (dempta unitate prima vel radio, ut in prima operatione, quando radius erat in primo loco) sit logarithmus exhibens sinum septimum sine formali subscriptione & subtractione; opus hoc modo renovatum sic statet.

Secunda analogia erit;

| | | |
|--|----------|--------|
| ut iste 4 ^{us} sin. cujus compl. arith. | 0328841 | } add. |
| ad sin. semisummæ 82. 46. | 9996530 | |
| ita sin. differ. 4. 58. | 8937398 | |
| ad sin. sep. ut ante. sum. trium | 9262769. | |

Ratio hujus operationis est quia abjiciendo radium in summa trium non solum subtrahi compl. quod addidi, sed & ipsum sinum quartum facili litura; puta, prout ex 9 sublato 4, idem numerus restabit, nempe 5; si ad 9 addam 6, (viz. 6 est compl. arith. 7 4 ad 10) modo ex summa 15 tandem adimam 10, quod ad astronomica quæ sequuntur, ea melius petuntur à nuperis Authoribus.

18. Partes sexagesimæ, puta 45, convertantur in decimales dividendo per 60, scilicet per auream regulam; si 60 habuerint 45, quot habuerint 100? nempe $0\frac{75}{100}$ five $\frac{3}{4}$; & quoniam denominator in hac fractione decimali tribus figuris exprimitur, ideo divisio per 60 remover

movet lineam separatricem uno loco versus finistram. $\left\{ \begin{array}{l} \text{In ex.scrup.sequ. incipit dividere} \\ 45^{\text{""}} \text{ (cyphris ut opus additis)} \\ \text{oritur } 75 \text{ supra script. \&c.} \end{array} \right.$

Aequinoctialis dividitur in 360 gradus, id est, 24X15, & sumuntur 15 gra- $\left\{ \begin{array}{l} \text{In exem. dividit primum numerum per 6, \&} \\ \text{quorum infra scriptum per 60, quod aequi-} \\ \text{pollet divisioni per 6 in 60, i. e. per 360.} \end{array} \right.$
 dus pro una hora.

25. Esto A. E :: M—A. E—N: quoniam factus ab extremis aequatur facto ex mediis, EM—AE=AE—AN. & transpositis speciebus ab una parte aequationis in alteram, sub signis contrariis, ut infra doceberis, Cap. 16. exurget 2AE—ME=AN. ideoque utraque parte divisa per 2A—M fiet $E = \frac{AN}{2A—M}$.

CAP. VII. De maxima communi mensura, &c.

DOcuit *Euclides*, lib. 7. Definit. 11. numerum illum esse primum quem unitas sola metitur, hoc est, dividit, ita, 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31, &c. sunt omnes primi: atque idem *Euclides*, ibidem, Definit. 12. definit illos numeros primos inter se esse, quos sola unitas communis mensura metitur, ut 15. 8. sunt inter se primi; nam quanquam 15 dividi potest tum per 3 tum per 5, & 8 dividi potest tum per 2 tum per 4, tamen nullus horum (3 5 2 4) utrumque tum 15 tum 8 dividet, sed sola unitas est utriusque communis mensura.

Jam quoniam saepe fit quod duo vel plures numeri non primi inter se quandoque dividi possint à pluribus mensuris sive divisoribus ut 5 12 256 dividi possint per

D 4

256

256 128 64 32 16 8 4 2, docuit *Euclides*, in Propositione 2. septimi El. quomodo in non primis inter se numeris, maxima communis mensura sive maximus eorum divisor inveniatur, nempe perpetua divisione majoris per minorem & divisoris per reliquum: & divisor ille qui primus dividuum suum metitur, absque ullo reliquo, maxima erit utriusque numeri dati communis mensura; quæ ab *Euclide* huc transtulit. *Oughtredus*, fractionum causa; nam eadem fractionis quantitas sive ratio exprimi potest per diversos numeros, ut in his omnibus fractionibus $\frac{512}{256}$ $\frac{256}{128}$ $\frac{128}{64}$ $\frac{64}{32}$ $\frac{32}{16}$ $\frac{16}{8}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{4}{2}$ eadem est ratio, scilicet, dupla, jam frequenter valde conducit ut eandem fractionem habeas in minimis numeris in quibus potest exprimi, ut pro $\frac{512}{256}$ scribas $\frac{2}{1}$.

Vidisti autem in secunda Sectione sexti hujus, quod si idem numerus duos datos numeros 512 & 256 dividat, quoti erunt divisio proportionales, id est, in eadem ratione cum divisio; quinetiam si divides eosdem duos vel quoslibet alios per maximam communem mensuram, habebis duos quotos in eadem ratione cum divisio & in minimis numeris in quibus ratio ista potest exprimi, ut demonstratur in 35. 7. elem. ut si divides 512 & 256 per 256, qui est maximus numerus, qui potest utrumque tum 512 tum 256 dividere, quoti erunt 2 & 1, qui sunt minimi in eadem ratione cum 512 & 256.

a

| | | | | |
|-----|------|------|------|-----------|
| | 31 | 124 | 155 | |
| 31) | 124) | 155) | 744) | 899 (1414 |
| | 124 | 124 | 620 | 744 |

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 41

In exemplo divide 899 per 744, pone 1 in quotiente; & quoniam 1 nihil mutat, tolle 744 ex 899, relinquitur 155, per quem divide divisorem 744, oritur 4; scribe 4 in quoto, & per 4 multiplica 155, fit 620, quem tolle ex 744, relinquitur 124, per quem divide ultimum divisorem 155, oritur 1; scribe 1 in quoto, & tolle 124 ex 155, restat 31, per quem divide 124, oritur 4; scribe 4 in quoto, & per 4 multiplica 31, fit 124, qui si tollatur ex 124, restat 0; ideoque ultimus divisor 31 dividens penultimum 124, sine reliquo erit maximus divisor five communis mensura, qui potest dividere 899 & 744, & revera solus, nam 2 vult dividere 744, sed non vult dividere 899.

In nostro exemplo divide 512 per 256, oritur 2, ex quo ducto in 256, fit 512, quo sublato ex 512, manet 0; ergo 256 est maxima communis mensura; sunt autem plures minores, ut supra videre licet.

In speciebus potes dividere 3Aq & 6A per 3A, maximam utriusque communem mensuram, quotientes erunt A & 2.

Adplica 4Acc & 6Aqq ad 2Aqq, quotientes erunt 2Aq & 3; hic 2Aqq est maxima communis mensura, sunt autem minores mensuræ, 2. 2A. 2Aq. 2Ac. A. Aq. Ac. Aqq. quæ omnes possant dividere 4Acc & 6Aqq.

Hinc fractiones speciosæ facile abbreviantur, dividendo per maximam ipsarum communem mensuram, nempe $\frac{BqA}{Bqc}$ reducitur ad $\frac{A}{C}$ dividendo per Bq maximam communem mens.

42 Oughtredus explicatus, five,

3. In operatione Proportionis, ut 12. 8 :: 15. 10. ducendus est secundus terminus in tertium, & factus dividendus per primum ad quartum (*viz.* 10 in exemplo) inveniendum, quod ubi numeri multiplicandi & dividendi sunt magni tedium parit; jam vero quoniam sæpe fit ut rationes facile reducantur ad minimos terminos, hinc Proportionis operatio sæpe facilitatur, ita ratio 12. 8. reducitur ad 3. 2. erg. 3. 2 :: 15. 10. & permutando 3. 15 :: 2. 10. hic 3. 15 reducitur ad 1. 5. erg. 1. 5 :: 2. 10. five 1. 2 :: 5. 10. ut in exemplo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \quad 2 \quad 5. \\ 2 \quad 8 :: 15. 10. \end{array}$$

CAP. VIII. De Partibus.

3. **Q**uam rationem habet numerator ad denominatorem eandem habet quantitas significata ad unitatem; 4. 5 :: $\frac{4}{5}$. 1.

R. S :: $\frac{R}{S}$ 1. nam per auream regulam & Cap. 10. hujus R. S :: $\frac{R}{S}$ $\frac{SR}{SR}$ sed $\frac{SR}{SR}$ valet unitatem, quia denominator est æqualis numeratori: sic in numeris $\frac{2}{3}$ = 1.

CAP.

CAP. IX. De Additione & Subductione partium.

1. **F**Ractiones sunt ejusdem speciei quando eosdem habent denominatores, ut 12 & 12 in his fractionibus $\frac{4}{12}$ & $\frac{10}{12}$; & tum five Additionis five Subtractionis, operatio est plana & facilis in numeratoribus partium peragenda ad eum modum quo fit in integris, ut in exemplo hic posito addendo, summa erit $4 + 10$, id est, $\frac{14}{12}$, vel subtrahendo $10 - 4$, id est, $\frac{6}{12}$.

Sed si sint diversarum specierum, id est, si diversos habeant denominatores, ut 12 & 3 in his fractionibus $\frac{10}{12}$ & $\frac{4}{3}$, reduci debent prius ad eundem denominatorem; id autem hac arte optime fieri potest dividendo denominatores 12 & 3 per maximam ipsorum communem mensuram, quæ hic est 3; divide ergo 12 per 3, oritur 4; & 3 per 3, oritur 1; ita habes duos quotos, nempe 4 & 1, numeros primos & minimos in eadem ratione cum 12 & 3; si igitur hos quotos 4 & 1 alterne ducas in 12 & 3, five per crucem, ita,

$\begin{array}{r} 12 \times 3 \\ 4 \times 1 \end{array}$
 habebis, ex alterna multiplicatione numerum eundem factum ex 12 in 1 atque ex 3 in 4, nimirum 12, qui numerus 12, hac arte inventus, minimus est numerus, qui dividi potest tum per 4 tum per 3, ut demonstratur apud *Euclid.* 36. 7. El.

Jam prout hactenus hos quotos multiplicasti alterne in denominatores 12 & 3, pro novo & communi denominatore 12 ita debes & alterne multiplicare eosdem quotos 4 & 1 in numeratores 10 & 4; alterne (inquam) five per crucem,

ita

ita, $\frac{10}{4} \times \frac{4}{1}$ unde ex 1 in 10 fit 10, ex 4 in 4 fit 16.
 fiunt, inquam, 10 & 16 pro novis numeratoribus, in
 quibus additio vel subductio facienda est, & summa de-
 nique vel differentia communis ille denominator 12
 subscribendus, totum opus ita staret,

26 sum. novorum numerat.

$\frac{10}{10} + \frac{16}{4}$ novi numeratores
 10 4 numeratores

Max. com. mens. 3) $\frac{12}{4} \times \frac{3}{1}$ denominatores.
 4 1 quoti

12 novus denominator ex
 alterna multiplicatione.

Ratio quare idem numerus 12 exurgit ex alterna ista
 multiplicatione petenda est ex 2. 6. hujus, & 18. 7. Ele.
 quoniam 4 & 1 sunt in eadem ratione cum 12 & 3. sc.
 4. 1 :: 12. 3. ergo per Theorema catholicum 1×12
 $= 3 \times 4$; hoc artificio inventi sunt novi numeratores
 ad novum denominatorem in iisdem rationibus cum
 iis qui primo positi erant, & ratio est, quia per ean-
 dem 18. 7. alternè multiplicas duos 4 & 3 primo posi-
 tos per quotam eundem 4, unde fiunt facti, sc. 16.
 12. multiplicatis proportionales 4. 3 :: 16. 12.

Potuiſti mox pro novo denominatore multiplicasse
 denominatores 12 & 3 in se invicem, unde factus fu-
 iſſet 36 pro novo denominatore, sed potius dividis per
 max. comm. mens. ut rationes habeas in minimis nu-
 meris.

sum.

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 45

| | | | | | |
|-------------------|----|---|----|--------------|-----------------|
| sum. nov. numer. | 67 | | | | 152 |
| novi numerat. | 39 | + | 28 | 57 | 8 5— |
| numeratores | 13 | | 7 | 19 | 1 144 |
| integer in medio | — | 2 | — | est 3 — | aufer. è 6 — 57 |
| max. cō. mens. 4) | 16 | X | 12 | 6) 48 | 18 3 — |
| | | | | | 144 |
| quoti | 4 | | 3 | quoti 8 | 3 95 |
| | | | | | 2 — |
| novus denominator | 48 | | | | 144 R |
| | | | | novus denom. | 144 |

Integer 2 qui in medio ponitur non consideratur in prima operatione, sed ex 3 quoto in 13 & quoto 4 in 7 fiunt 39 & 28 pro novis numeratoribus, qui adduntur per signum + & summa est 67, adeo ut fractiones jam tandem additæ sint $\frac{67}{48}$, quæ fractio vocatur impropria, & est unitate major, quia numerator est denominator major, & dividendo numeratorem per denominatorem resolvitur in $1\frac{19}{48}$ quibus additis ad integrum 2 in medio, erit summa $3\frac{19}{48}$.

Eodem modo in secundo exemplo, quod est subtractionis, emergunt tandem $3\frac{57}{144}$ auferend. è $6\frac{8}{144}$ ostendit operandi modum in reliquis numeris juxta positis, qui ab imperitis accipi possint pro alio exemplo, quoniam non potes tollere $\frac{57}{144}$ ex $\frac{8}{144}$, resolvit igitur $6\frac{8}{144}$ in $5\frac{52}{144}$, nam $\frac{144}{144}$ valet unitatem, adde $\frac{8}{144}$, summa est $\frac{52}{144}$; jam ergo tolle 3 ex 5 restat 2, & tolle 57 ex 152, rest. 95, ideoque $2\frac{95}{144}$ erit R sive residuum.

In speciebus esto exemplum additionis, adde $\frac{A}{B}$ & Z .
 sum. $\frac{A + ZB}{B}$ resolve integrum Z in fractionem sub-
 scribendo

scribendo unitatem, ita, $\frac{A}{B} \times \frac{Z}{1}$ tum quia denomi-
natores B & 1 non habent communem mensuram, mul-
tiplica B in 1 pro denominatore, & decussatim, tam 1
in A quam B in Z pro numeratoribus, quos conjunge
per signum + pro summa.

Esto exemplum subtractionis; ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$ re-
stat $\frac{CA - Bq}{BC}$ duc B in C pro novo denominatore, &
decussatim, tam C in A quam B in B pro novis nume-
ratoribus, quos conjunge per signum — pro differen-
tia.

Esto exemplum additionis ubi opus est communi
mensura.

BE + DA novi numeratores
B + D numeratores

max. com. mens. C.) $\frac{CA}{A} \times \frac{CE}{E}$ denominatores
quoti

CAE novus denominator ex
altern. multip.

Breviter ita speciose demonstratur BE novum nume-
ratorem esse ad CAE novum denominatorem, ut B ad
CA per 2 sexti hujus; ut B. CA :: BxE. CAxE.
sc. duobus, B & CA multiplicatis per eundem E.

Si denominator sit idem utrobique, ut $\frac{AZ}{BB}$ non
opus est ut scribas $\frac{AB + ZB}{BB}$ sed sufficit ut in nume-
ratoribus

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 47

ratoribus partium fiat additio, ita, $\frac{A+Z}{B}$
in compositis speciebus ad $AB + DE$ adde $A + E$.

statuantur ita,

$$\begin{array}{r} \text{AB} + \text{DE} \quad \text{A} + \text{E} \\ \hline \text{A} + \text{E} \quad \text{I} \\ \hline \text{AB} + \text{DE. plus Aq} + 2\text{AE} + \text{Eq.} \\ \hline \text{A} + \text{E} \end{array}$$

summa erit

Si species adjunctas sibi habuerint fractiones nume-
rales, ut ad $\frac{1}{2}B$ adde $\frac{1}{4}C$, quoniam $\frac{1}{2}B = \frac{2}{4}$ scribe ita,
ad $\frac{2}{4}B$ adde $\frac{1}{4}C$

max. c. m. 2.) $\frac{2}{1} \times \frac{4}{2}$ summa erit $\frac{2B+C}{4}$
quoti
nov. denom. 4

Quod additio conficit sub- } $\frac{2B+C}{4} C$ tolle $\frac{C}{4}$
tractio dissolvit, ergo ex

max. c. m. 4.) $\frac{2B+C-C}{4} \times \frac{4}{1}$ In hoc exemplo quum u-
novus denom. 4 nitas nihil mutat, & $-\frac{C}{4}$
quoti expungit $+\frac{C}{4}$, relinquitur
 $\frac{2B}{4}$, id est, $\frac{B}{2}$ dividendo tam
numeratorem quam denomi-
natores per 2, atque idem
evenit ac si in numeratori-

bus partium operatio mox peracta fuisset.

Ex

48 Oughtredus explicatus, sive,

Ex $\frac{3}{4}B$ tolle $\frac{1}{10}A$, quoniam $\frac{3}{4}B = \frac{3B}{4}$, nam ex $\frac{3}{4}$ in $\frac{1}{10}$ fit $\frac{3B}{40}$, ut proximo Capite patebit. Scribe $\frac{3B}{4}$ & $\frac{2A}{10}$.

$$\begin{array}{r} 15B - 4A \text{ novi numeratores} \\ 3B \quad 2A \text{ numerat.} \end{array}$$

max. cō. mens. 2) $\begin{array}{cc} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{array}$ denomin.
quoti

novus denom.

$$\begin{array}{cc} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{array} \rightarrow 20$$

differentia est $\frac{15B - 4A}{20}$

CAP. VIII.

De Multiplicatione & Divisione partium

IN fractionibus $\frac{3}{4} \times \frac{6}{8}$ 3 & 8 sunt heterologi termini, scil. unus numerator, alter denominator; 3 & 6 homologi, scil. uterque est numerator.

Scire te oportet quod operationes multiplicationis & divisionis præstari possint sine reductione, sed sæpe conducit terminos reducere, ut fractiones five rationes exhibeantur in minimis numeris; sic in $\frac{5}{2} \times \frac{12}{8}$ termini divisi per max. comm. mens. scil. 256, comparantur, id est, reducuntur ad minimos terminos, sc. ad $\frac{3}{4}$.

Memoriæ causa, & cum grano Poeticæ licentiæ, regula esto,

Comparat in fractis multiplicatio cruce.

Duc $\frac{1}{10}$ in $\frac{20}{27}$; statuantur ita,

quoti

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 49

quoti 1×5
 $\begin{array}{r} 9 \quad 20 \\ \times \quad \times \\ \hline 16 \quad 27 \end{array}$ fit $\frac{5}{12}$
 quoti 4×3

quoti ex 16 & 20 divis
 per max. com. mens. 4,
 sunt 5 & 4; & quoti ex
 9 & 27 divis per max.
 com. mens. 9 sunt 1 & 3.

ex quotis homologis 1×5 & 4×3 fit $\frac{5}{12}$.

quotus 4

fic ex $\frac{8}{9}$ in $\frac{5}{6}$ fit $\frac{20}{27}$ max.com. mens. in 8 & 6 est 2.

3 quotus.

Unde sunt quoti 3 & 4; sed 5 & 9 non delentur,
 quia non habent ullam mensuram communem, sed sunt
 in minimis terminis.

3. Quod si integri partibus sint immixti, resollen-
 di sunt integri in partes;

duc $\frac{1}{2}$ in $3\frac{1}{4}$, resolve $3\frac{1}{4}$ in $\frac{13}{4}$ per 6. 8. hujus;

& statuantur ita, $\begin{array}{r} 5 \quad 13 \quad 65 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \hline 1 \quad 4 \quad 4 \end{array}$ fit $\frac{65}{4}$

In speciebus duc $\frac{A}{B}$ in B, præstat B integrum in
 formam fractionis reducere, ut antea in Additione mo-
 nui; ita, $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{1}$; & quoniam Divisio per max. com.
 mens. peragitur sola ejusdem expunctione, nempe utro-
 bique deletur in dividendis; ergo in exemplo uterque
 terminus heterologus, scil. B utrobique deletur, quia
 B est in B. 1. & iterum B est in B semel; sed quoni-
 am unitates nihil mutant, non exprimuntur; & factus
 est solum A.

E

Aliter

50 Oughtredus explicatus, five,

Aliter exemplum ita statuer, $\frac{I}{I}$ quotus.

B est max. com. mens. ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{I}$ fit $\frac{A}{I}$, hoc est, A.
quotus $\frac{I}{I}$

quotus $\frac{E}{E}$
ex $\frac{BcE}{D}$ in $\frac{M}{BcA}$ fit $\frac{Em}{DA}$ Bc est max. comm. mensu.
A quotus.

ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{I}$ fit $\frac{ZA}{B}$
ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{ZA}{c}$ fit $\frac{ZAq}{Bc}$ } In his exemplis nulla est max.
comm. mensura five litera
communis in speciebus per
crucem; ideoque species
homologæ mox in se multiplicantur.

In Divisione, in hoc Capite & alibi, ante hanc lunu-
lam) stat Divisor, Quotiens autem post hanc (

Divide $\frac{15}{28}$ per $\frac{3}{7}$; divide homologos terminos 15
& 9 per max. com. mens. 3; etiam & 16, 28 per su-
am max. comm. mens. 4: & tum multiplica heterologos
quotos pro quotiente: & nota, quod semper denomi-
nator quotientis fit ex numeratore divisoris & denomi-
natore dividendi. Statuatur exemplum ita,

3 5 quoti
3 est max. com. mens. $\frac{9}{28}$ $\frac{15}{28}$ $\left(\frac{20}{21}\right)$
4 est max. com. mens. $\frac{16}{28}$ $\frac{16}{28}$ $\left(\frac{21}{21}\right)$
4 7 quoti

3 est max. com. mens. $\frac{8}{28}$ $\frac{37}{28}$ $\left(\frac{111}{8}\right)$ $\left(13\frac{7}{8}\right)$
3 1 quoti

In

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 51

In hoc exemplo 37 fit ex 7 integro resolutio in partes, multiplicando 7 per denominatorem 5, unde fit $\frac{35}{5}$, cui adde $\frac{2}{5}$, summa erit $\frac{37}{5}$.

$\frac{111}{8}$ est impropria fractio quæ resolvitur in integros cum partibus, nempe in $(13\frac{7}{8})$ dividendo 111 per 8.

In speciebus ipse *Oughredus* integros descripsit per modum fractionis subscripta unitate, ut $\frac{D}{1} \frac{Bc}{1}$, &c.

$\frac{Ac}{C} \frac{Bc}{D} \frac{Bc}{D} \frac{C}{D}$ { In hoc exemplo per c minorem intellige cubum, ut A cubum, B cubum.

Divide $\frac{DC}{BF}$ per $\frac{DA}{BE}$ quotiens erit $\frac{CE}{AF}$.

Statuantur ita,

quoti A C
D est max. com. mens. $\frac{DA}{BE} \frac{DC}{BF} \frac{CE}{AF}$

B est max. com. mens. $\frac{BE}{BF} \frac{CE}{AF}$

quoti E F

Divide $\frac{1}{2} B$ per $\frac{1}{2} C$; & statuantur ita,

$\frac{C}{2} \frac{B}{2} \frac{B}{C}$ 2 est max. com. mens.

Divide $\frac{1}{2} B$ per $\frac{1}{3} C$; statuantur hoc pacto,

$\frac{C}{5} \frac{B}{2} \frac{5B}{C2}$ non datur max. com. mens.

Ex methodo Multiplicationis exposita vides, quod si fractio aliqua ut $\frac{A}{B}$ multiplicetur per denominatorem B, fiet productus tantum numerator A, hoc modo, $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{1}$ fit $\frac{AB}{B}$ hoc est, A, quod si species sint mixtae, ut $\frac{A+B}{C}$ in $\frac{E+D}{E}$ possis per leges Additionis easdem prius in unam fractionem compingere,

ita, $\frac{Ac+B}{C}$ in $\frac{Eq+D}{E}$ fiet $\frac{AcEq+AcD+BEq+BD}{CE}$.

Similiter si fractiones sint compositæ,

duc $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ in $\frac{E}{F} + \frac{G}{H}$ pro $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ scribe $\frac{DA+BC}{BD}$.

& pro $\frac{E}{F} + \frac{G}{H}$ scribe $\frac{EH+FG}{FH}$ tum operatio stabit hoc

pacto, ex

$\frac{DA+BC}{BD}$ in $\frac{EH+FG}{FH}$ fit $\frac{DAEH+DAFG+BCEH+BCFG}{BDFH}$.

Si velles unitatem designare per quemlibet denominatorem, puta B, scribe $\frac{B}{B}$.

Quis numerus est $\frac{2}{3}$ è 21, multiplica 21 per $\frac{2}{3}$, nam ut $1 \frac{2}{3} :: 21.6$. vel ut $7.2 :: 21.6$. nam integer 1 valet $\frac{2}{3}$ ac si esset ut $\frac{2}{3} \frac{2}{3} :: 21.6$.

CAP. XI.

Via ad Aequationem analyticam sternitur.

1. **S**unto duæ magnitudines, major & minor; dico cubum è summa utriusque constare, ex cubo majoris plus triplo quadrato majoris ducto in minorem, plus quadrato triplo minoris ducto in majorem plus cubo minoris; quod brevissime & clarissime phantasiæ juvandæ gratia symbolis ita exprimatur;

Dico, C: $A+E. = Ac + 3AqE + 3AEq + Ec.$

$A + E$, five summa duarum magnitudinum appellatur binomium. $A - E$, five differentia appellatur residuum five apotome, ut ex 10 Elem. discas.

2. Quoniam eadem magnitudo variis symbolis exprimi potest hinc emergunt æquationes, scil. summa designari potest vel per Z , vel $A + E$; ergo $Z = A + E$.

Differentia exprimitur vel per X , vel per $A - E$; erg. $X = A - E$ quadretur utraque pars æquationis erit $Zq = Aq + 2AE + Eq$: etiam & $Xq = Aq - 2AE + Eq$; ideoque $Zq - Xq = 4AE$: nam per Sect. 4. Cap. 3. ex $Aq + 2AE + Eq$ tolle $Aq - 2AE + Eq$, restabit $Aq + 2AE + Eq - Aq + 2AE - Eq$; & expunctis $+ Aq + Eq$ propter $- Aq - Eq$, relinquitur $4AE = Zq - Xq$; & divisa utraque parte per 4, erit $\frac{Zq - Xq}{4} = AE$: pariter $Z + X = 2A$: nam per Cap. 2. ad $A + E$ adde $A - E$; ita stabit exemplum, $A + E + A - E$, hoc est, $2A$; & quoniam $Z + X = 2A$, ideo dividendo utramque partem per 2, erit $\frac{Z + X}{2} = A$.

54 Oughtredus explicatus, five,

Hujusmodi æquationes sunt etiam theorematum, ex.gr.
4. 2. Elem. eleganter exprimitur in hac æquatione;
nempe, $Zq = Aq + 2AE + Eq$.

Et facile est horum theorematum cumulum augere,
quoniam $Z\circ = Aq + Eq$ & $X\circ = Aq - Eq$: ergo,
 $Z\circ + X\circ = 2Aq$ & $Z\circ - X\circ = 2Eq$: ergo $\frac{Z\circ + X\circ}{2} = Aq$
& $\frac{Z\circ - X\circ}{2} = Eq$ sic etiam quoniam $2A = Z + X$; er-

go quadrando utramque partem, $4Aq = Zq + 2ZX + Xq$;
& dividendo per 4, $Aq = \frac{Zq + 2ZX + Xq}{4} = \frac{Z\circ + X\circ}{2}$

Nota, quod est magna differentia inter $\text{Æ}q$ & $\text{A}Eq$;
quippe $\text{Æ}q$ fit ex AE in se; $\text{A}Eq$ fit ex AE in E tan-
tum.

3. Sit $A = 8$. $E = 4$ summa Z est 12, ergo $Z - A = E$, id est, $12 - 8 = 4$.

5. E five magnitudo minor est $= \frac{SA}{R}$ quod sic pro-
batur; ut, $R.S : A. \frac{SA}{R}$

Virtute aureæ regulæ ducatur S in A , & dividatur
producta magnitudo SA per R , quotiens, scil. $\frac{SA}{R}$
erit terminus quartus proportionalis, qui (si major sit
 A) necessario minor erit; & ad A in ratione data R
ad S .

Ad A adde $\frac{SA}{R}$ scil. majorem ad minorem, summa
erit per Cap. 9. $Z = \frac{RA + SA}{R}$ quadretur major &
fit

fit Aq, quadretur minor, scil. $\frac{SA}{R}$ & fit per Cap. 10.

De multiplicatione fractionum $\frac{Sq Aq}{Rq}$ ad $\frac{Sq Aq}{Rq}$ adde

Aq, & per Cap. 9. $Z = \frac{Rq Aq + Sq Aq}{Rq}$

CAP. XII.

De Genesi & Analyfi potestatum.

1. **R** Adix, quadratum, cubus, quadrato-quadratum, appellantur potestates; quia radix quæ (ducta in unitatem) seipsam potest, etiam aliquoties in se continua multiplicatione ducta, potest (verbo *Euclideano*) id est, valet efficere illos numeros ut ex 2 radice in se fit 4 quadratum, ex 2 in 2 in 2 fit 8 cubus, ex 2 x 2 x 2 x 2 fit 16 quadrato-quadratum.

Et ex ista continua multiplicatione singularium
2. radicum omnium infra 10 facta est tabella prior, in qua prima series descendens est radicum; secunda est quadratorum; tertia cuborum, &c. ideoque supra notantur literis symbolicis 1. q. c. qq. qc. &c. & figuris numeralibus

| |
|---|
| 1 |
|---|

| |
|---|
| 2 |
|---|

| |
|---|
| 3 |
|---|

| |
|---|
| 4 |
|---|

| |
|---|
| 5 |
|---|

 quæ sunt potestatum indices, ut jam ante exposuimus.

Et nota hic quod *Oughredus*, quintanam potestatem cujus hic index est

| |
|---|
| 5 |
|---|

 & qc. vocat quadrato-cubum, quam alii vocarunt surdesolidum ex additione surdi ad solidum, quia non habet radicem quadratam

E 4

vel

56 Oughtredus explicatus, sive,

vel cubicam ut quadrato-quadratum habet, habet nempe radicem quadratam, quæ radix & ipsa habet radicem quadratam; ut radix qu. 16 est 4, cuius radix quadrata est 2.

Potestatem sextanam appellarunt illi, & cum iis *Carytesius*, quadrato-cubum, quia est quadrati cubus, ut 64 est cubus 4, qui est numerus quadratus, est etiam illa sextana potestas quadratus cubi, ut 64 est quadratus 8, qui est cubus 2. Sed quoniam indices sunt logarithmi potestatum, se addentes atque subtrahentes prout potestates se multiplicant & dividunt, maluit author quintanam potestatem, ut 32, appellare quadrato-cubum, quanquam sit neque quadrati cubus neque cubi quadratus, fit tamen ex multiplicatione quadrati 4 in cubum 8; sic ex q in c (qui sunt indices symbolici) per speciosam multiplicationem fit qc; idcirco a symbolo suo qc merito hæc potestas mutuare possit nomen quadrato-cubi.

3. In speciebus, ex multiplicatione $A+E$, fiunt potestates a radice binomia cuius majus nomen est A, minus E, ut si 12 secetur in duas partes, 8 majus nomen, & 4 minus, quæ faciliora sunt quam ut multa explicatione indigeant; nam ex singularibus factis in summam collectis fit quadratum $Aq + 2AE + Eq$, ex cuius iterum multiplicati per $A + E$ singularibus factis in summam collectis fit $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$. cubus; ut in loco ab Authore exponitur.

In tabella posteriori, cuius usus est pane divinus, primo ordine habes latus binomium $A + E$, cuius index I non exprimitur; in secundo ordine descendendo

cendendo habes quadratum ex $A + E$, sc. $Aq + 2AE + Eq$, cujus index $\boxed{2}$ scribitur supra species descendentes; in tertio habes cubum $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$, cujus index $\boxed{3}$ &c.

5. Et quælibet intermedia species cujusque ordini, ut ex. gr. 10 $Ac Eq$, in ordine quadrato-cubico, sub indice 5, componitur ex duabus speciebus, utrinque proximis in ordine præcedente, nempe ex Ac in 4 AcE ordinis præcedentis quadrato-quadratici, & ex Eq in 6 $Aq Eq$ ordinis ejusdem: & numerus 10 affigendus in 10 $Ac Eq$ conflatur ex 4 & 6 (qui additi faciunt 10) in 4 AcE & 6 $Aq Eq$, & similiter fit in aliis.

Nota autem, quod in $Aq Ac$ & reliquis speciebus, quibus nullus numerus affigitur, subintelligendus est 1, est enim $Ac = 1Ac$ duæ extremæ potestates sunt 6, 7. diagonales, & species intermedia sunt complementa, siquidem ex collatis ultima definitione primi & secunda secundi Elem. patet quod in hac figura parallelogramma $d e$ & $e f$ per quæ diameter



$$\begin{aligned} d o &= A \\ o c &= E \\ d c &= A + E. \end{aligned}$$

non transit, sunt complementa, reliqua duo $e b$ & $e c$ dicuntur circa diametrum $b c$ consistere, & appellantur diagonalia; in quadratis autem, quadrata diagonalia vocantur, quorum diagonalium alterutrum cum complementis

mentis vocatur gnomon $= AE + AE + Aq$, hoc est, $Aq + 2AE$; sed usitatus & præcipue ob figuræ similitudinem minor potestas diagonalis cum complementis appellatur gnomon $= Eq + 2AE$; atque ita *Oughtredus*, qui etiam per uncias intelligit numeros complementis affixos, ut in ordine quadrato-cubico 5.10.10.5. qui una cum propriis speciebus 5 AqqE 10 AcEq 10 Aq Ec 5 AEqq Eqc gnomonem in hoc ordine constituunt.

Cum inter binā quadrata Aq Eq in ordine quadrato unica est species, nempe 2AE inter Aq Eq, quadratorum sedes unicum interponunt pro complementis locum: inter Ac & Ec duæ sunt species, sc. 3AqE & 3AEq.

C A P. XIII.

His itaque præmissis, ad genesin Potestatum accedamus.

1. **U**T non modo rem, quæ per se satis plana est, sed & rei rationem intelligas, ita accipe genesin quadrati, & juxta quartam secundi Elem. dividatur

57 in duo nomina $A=5$ & $E=7$; quadratus ex 57 erit $= Aq + 2E + Eq$.

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 7 \\ \hline \end{array}$$

$$2500 = Aq$$

$$700 = 2E$$

$$49 = Eq$$

} gnomon.

$$\hline 3249$$

summa.

Revera

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 59

Revera cogitandum est 57 esse binomium compositum ex 50 + 7, atque ita quadratum ex majori nomine 50 fit 2500 = Aq, & duplex rectangulum ex bis 50, hoc est, 100 in 7 = E fit 700 = 2AE, ut facile est ex nostro exemplo intelligere, ubi loci vacui circulis complentur.

In 57 separantur 5 & 7 uno tantum puncto interposito, ita, 5 . 7 pro complementorum una specie, *viz.* 2AE, quia ex natura multiplicationis ibi stare debet ultima figura 0 particularis facti 10 = 2A ex 2 ducto in 5, quæ figura 5 prima est in 50, in hunc modum;

| | | |
|------|----------------|---|
| 50 | multiplicandus | $\left\{ \begin{array}{l} \text{ex 2 in 0 fit 0, loco autem} \\ \text{hujus cyphræ punctum in} \\ \text{facto posuimus, quia de} \\ \text{hac cyphra non sumus lo-} \\ \text{quuti.} \end{array} \right.$ |
| 2 | multiplicator | |
| — | | |
| 10 . | factus | |

Nam hoc ordine collocandi sunt facti particulares, nempe factus ex E in ultimo loco, ex A in penultimo, ex Aq in antepenultimo, qui in exemplo punctatur supra ita, 5 . 7

2. In cubando 57 duo loci interponendi, ita 5 . . 7, pro duabus complementorum speciebus, nempe 3AqE 3AE q inter diagonales cubos Ac : Ec : & factus 525 = 3AqE stabit in loco antepenultimo, nam quoniam A = 50 erit 3Aq = 7500 & E = 7; ideo ultima figura in 525 facta ex 7 in 75 stare debet in loco antepenultimo, quia 5 in 7500 est figura antepenultima.

5 . . 7

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot \\ 5 \cdot 7 \\ \hline \end{array}$$

$$125000 = Ac$$

$$52500 = 3AqE$$

$$7350 = 3AEq$$

$$343 = Ec$$

$$185193 \text{ summa.}$$

Sic in Cap. 4. ostendimus quod multiplicando 4576 per 892, facti singulares stare debent descensu obliquo, quia pro ultimo facto 36608 revera multiplicabas per 800.

$$\left\{ \begin{array}{r} 9152 \\ 41184 \\ 36608 \\ \hline \end{array} \right.$$

Ita in Sectione tertia ubi latus constat ex pluribus figuris 57209, debes primum conficere potestatem ex 57, ac si latus esset 57000, & ejus duo nomina 50000 = A & 7000 = E fiet pro quadrato operando, ut ante, 3249000000 = Aq + 2AE + Eq; tum confice quadratum ex 572, ac si latus esset 57200, & duo nomina 57000 = A & 200 = E quoniam vero jam ante confecisti quadratum ex 57000, scilicet, 3249000000 sumatur 3249000000 pro quadrato majoris nominis = Aq, & perge pro gnomone constituendo operari ut species 2AE. Eq dirigunt, fiet 3271840000 = Aq + 2AE + Eq, quod tamen in proxima operatione sumi debet pro quadrato majoris nominis 57200 = Aq; minus erit 00, unde nihil conficietur, sed additis duabus cyphris (ut videbis in exemplo ad asteriscum) operatio renovanda erit: diligenter autem observabis ne te ipsum frustra torseris omissam esse in exemplo Authoris

unam

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 61

unam operationem propter cyphram in penultimo loco radicis 57209, opus integrum quoad hoc ita staret,

Quæ dicta sunt si intellexeris, facile ad cubum radicis ex pluribus figuris constantis applicueris.

| | | | | |
|------|----|----|----|----------|
| 32 | 71 | 84 | | Aq. |
| | 00 | 00 | 00 | 2 AE |
| | | 00 | | Eq |
| | | | | |
| * 32 | 71 | 84 | 00 | Aq |
| | 10 | 29 | 60 | 2 AE |
| | | | 81 | Eq |
| | | | | |
| 32 | 72 | 86 | 96 | 81 summa |

4. Ex his quæ jam declarata sunt non difficile erit reliquas etiam omnes superiorum generum potestates progignere, placet hic apponere genesin quadrato-cubi puri; ubi quatuor puncta interponenda pro quatuor complementorum speciebus, nempe 5 A q q E, 10 A c E q. 10 A q E c. 5 A E q q inter quadrato-cubos diagonales A q c & E q c quadrocubetur 23.

Duo

62 Oughtredus explicatus, five,

Duo nomina sunt 2 & 3 revera 20 + 3.

$$A=2$$

$$E=3$$

| | |
|-----------------------|--------|
| 2 3 2 | |
| 32 | Aqc |
| 240 | 5 AqqE |
| 720 | 10AcEq |
| 1080 | 10AqEc |
| 810 | 5AEqq |
| 243 | Eqc |

gnomon.

Quadrato-cubus è 23. 6436343 summa. Aqc A=23

Quod si placeat 2798410 5AqqE E=2

quadrato-cubare 232, 486680 10AcEq

pergere licet sumendo 42320 10AqEc

23 pro A, & 2 pro e, ac 1840 5AEqq

si binomium compositum esset ex 32 Eqc

230 majori nomine, & 2 minore

672109330432 quadrato-cubus

è 232.

Nihil hic loquitur Author de genesi potestatum adfectarum, nempe de ejusmodi potestatibus alibi tractaturus, verum ut Lector præparetur ad eas in suis locis intelligendas operæ pretium duxi ut adfectarum potestatum generationem hoc loco exponerem, breviter autem atque quatenus rei natura fert & possim dilucidare.

Quid est autem Potestas adfecta?

Rpondeo, Potestas adfecta tum dicitur, quando radix five latus aliquod in se ducitur, vel semel, ut in quadrato; vel continua multiplicatione, toties quoties opus est in superioribus potestatibus; ut A + E in se fit

Aq

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 63

$Aq + 2AE + Eq$; iterum in $A + E$ fit $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$: esto $A + E$ binomia radix = L ,
cujus majus nomen sive latus est A , minus E ; er-
go $Lq = Aq + 2AE + Eq$, & $Lc = Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$, quando (inquam) radix in se, &c. & præ-
terea aliquis alius numerus sive magnitudo, puta B ,
ducitur etiam in radicem $A + E$, unde fit $BA + BE$,
magnitudo composita, addenda quadrato puro, viz.
 $Aq + 2AE + Eq$; unde fit quadratum adfectum, $Aq + 2AE + Eq + BA + BE$. In numeris, ex 4×4 fit 16,
quadratum purum, cui addatur $2 \times 4 = 8$ fit 24, qua-
dratum adfectum; hæc magnitudo B appellatur co-ef-
ficiens, quia una cum illa alia in quam ducitur facit
vel planum vel quadratum, & est vel longitudo vel
latitudo, nempe in hoc casu ubi de quadratis agimus
quæ ex binis tantum dimensionibus constant. In or-
dine cubico, ex $A + E$ in se, &c. fit cubus purus,
 $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$; & præterea aliqua alia
magnitudo, puta B , ducitur vel in gradum aliquem
hujus puri cubi, ut in $Aq + 2AE + Eq$, unde fit
 $BAq + B2AE + BEq$, addend. ad $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$;
unde fit cubus adfectus $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec + BAq + B2AE + BEq$. In numeris ex 3 cubato fit 27,
cui addatur $2 \times 9 = 18$, fit 45, cubus adfectus; &
 $B = 2$ est co-efficiens longitudo quæ ducta in quadra-
tum 9 facit solidum 18.

Vel in hoc eodem ordine cubico, præterea aliqua alia
magnitudo, puta Cq , ducatur in radicem cubi puri,
nempe in $A + E$, unde fit $CqA + CqE$. addend. cubo
puro $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$, unde fit cubus ad-
fectus, $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec + CqA + CqE$. In
numeris

64 Oughtredus explicatus, sive,

numeris ex 3 cubato fit 27, cui addatur $2 \times 3 = 6$ fit 33 cubus adfectus; & $Cq = 2$ est co-efficiens magnitudo plana, quæ ducta in cubi radicem 3 facit solidum 6.

Vel in hoc eodem ordine possint dari duæ co-efficientes, quarum una ducatur in radicem, altera in radicis quadratum, ut ex utriusque additione ad cubum purum fiat ille adfectus; atque ita vides cubum adfici posse tribus modis; & generaliter quælibet subsequens potestas adfici potest toties bis quoties antecedens unitate addita, ut

q. 1
c. 3
qq. 7
qc. 15
cc. 31, & c in infinitum.

Observasti forte quod in ordine cubico B co-efficientem $= 2$, appellavimus longitudinem, & $Cq = 2$ magnitudinem planam, ratio est, quia co-efficiens semper æstimatur juxta qualitatem potestatis affectæ & magnitudinis gradum in quem ducitur, ita in ordine cubico, quoniam cubus est solidum, ejus generis erunt omnes species, ita Aeq est solidum constans ex tribus dimensionibus $A \times E \times E$; pariter AqE est solidum; ideoq; in illo ordine si co-efficiens ducatur in latus quod unam tantum dimensionem habet, cogitabis co-efficientem tanquam quadratum constare ex duabus, ut in $CqA + CqE$, quanquam per Cq intelligis tantum 2, qui numerus neque est quadratus neque planus, ita tamen æstimandus est ac si fieret ex ductu sui ipsius in unitatem; ita 2 quadrat in $1 = 2$ solido.

Quod si ducatur in quadratum lateris $A + E$, scil. $BAq + B_2AE + BEq$, jam B erit tantum longitudo vel latitudo,

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 65

latitudo, nimirum quoniam quadratum constat ex duabus dimensionibus, una tantum desideratur in ordine cubico ut fiat solidum: uno verbo, heterogenea homogeneis addi vel subtrahi nequeunt: est hæc notio artis filio digna; nimirum ad lineam non potes addere superficiem, ad longitudinem non potes addere planum, ad quadratum non potes addere cubum, nempe solidum ad superficiem: jam vero quoniam magnitudines sive numeri adficientes addi debent ad potestatem puram, ut fiat ex illarum additione adfecta; debent ergo illæ potestates adficientes esse ejusdem generis cum potestate pura, quod fit concipiendo magnitudinem co-efficientem tot habere dimensiones quot desiderantur in magnitudine in quam ducitur, ut uberioris illustrationis causa, in ordine quadrato-cubico, quælibet species constat ex 5 dimensionibus, nam Aq^3 constat ex $A \times A \times A \times A \times A$, quoniam igitur in adfectione BAq^3 , Aq^3 constat ex 4 dimensionibus, sc. ex $A \times A \times A \times A$, ergo co-efficientis B erit tantum longitudo, quia una tantum dimensio desideratur; sed in Cq^2Ac quoniam Ac constat tantum ex tribus, co-efficientis Cq^2 constabit ex duabus, & in omnibus speciebus istius ordinis simile reperies, nam uncia in hoc computo non omnino considerantur.

Id autem tum in Genesi tum in Analyfi observandum, quod prout in potestatibus puris ita etiam in adfectis singulæ species suas sibi proprias sedes vendicant; neque enim numeri ullo modo quo libet vel prout fors tulerit, collocandi; ut clarius in exemplis patebit.

66 Oughtredus explicatus, five,

Genesis quadrati adfecti sub latere $A+E$ & co-efficientente longitudine five latitudine B quæ in latus $A+E$ ducenda.

$$\begin{array}{rcl}
 5 \cdot 7 & & B=3 \\
 25 & Aq & \\
 70 & 2AE & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = lq \\
 49 & Eq & \\
 15 & BA & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = Bl \\
 21 & BE & \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} lq + Bl = Cq = 3420$$

3420 quadratus adfectus: quadratus purus erat in exemplo Oughtrediano 3249.

Genesis cubi adfecti ex duabus co-efficientibus, una B longitudine ducta in quadratum lateris $= Aq + 2AE + Eq$; altera Cq tanquam numero plano ducto in latus $A+E$

$$\begin{array}{rcl}
 5 \cdot 7 & & B=2 \\
 125 & Ac & \\
 525 & 3AqE & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = lc \\
 735 & 3AEq & \\
 343 & Ec & \\
 50 & BAq & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = Blq \\
 140 & B2AE & \\
 98 & BEq & \\
 15 & CqA & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = Cql \\
 21 & CqE & \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} Cq = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} lc + Blq + Cql = Dc$$

$Dc = 191862$ cubus adfectus: cubus purus erat 185193.

Genesis

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 67

Genesis quadrato-cubi adfecti adjunctione planoso-
lidi sub latere $A+E$, & co-efficiente numero quadrato-
quadratico $=Fqq=5$

| | | | |
|--|-------------|--------|--------------------|
| I. five latus est = 23 cujus duo nom. $A=2$ & $E=3$ | 2 3 | | |
| | 32 | Aqc | |
| | 240 | 5AqqE | } = lqc |
| | 720 | 10AcEq | |
| | 1080 | 10AqEc | |
| | 810 | 5AEqq | } = Gqc |
| | 243 | Eqc | |
| | 10 | FqqA | |
| | 15 | FqqE | } = FqqI |
| | | | } lqc + FqqI = Gqc |

$Gqc=6436458$ quadrato-cubus adfectus, purus e-
rat 6436343 : quadrato-cubus adfici potest 15 variis
modis, difficillimum exhibebit Author ad calcem ope-
ris; numerosam sane potestatem cum omnibus adfecti-
onibus ex quibus potestas quadrato-cubica adfecta con-
stare potest: nos quibus difficilia explanare scopus est
omnium e regione facillimum jam exhibuimus.

CAP. XIV.

*Sequitur Analysis, qua est eductio radices ex nume-
rosa potestate data.*

- A** Nalysis postquam sedes potestatum diagonali-
um pro suo quasque juxta tabulam posteriorem
genere, punctis (posito primo puncto sub loco unita-
tum)

tum) binis pro quadrato, ita, 3272869681 ; ternis pro cubo, ita, 187237601580329 ; & quaternis pro quadrato-quadrato, &c. Postquam, inquam, analysis ita sedes potestatum distinxerit, primo ex figuris primi à sinistro puncti potestatem diagonalem tollit, nempe, $25 = Aq$ ex 32 , & relinquitur 7 scribendus supra figuram 2 ; latusque ipsius, quod vocetur $A=5$, scribit in margine post lunulam quotientis, (est enim extractio radicis, quasi divisio quadam) tum numero reliquo (ad proximum usque punctum) qui gnomonem intelligitur continere, id est, ad 772 , per divisorem ex latere A invento legitime conflatum, id est, $10=2Aq$ propter $2AE$, & in cubo compositum ex $3Aq$ & $3A$, (propter complementa $3AcE$ & $3AEq$, sedibus suis observatis, id est, unitates divisoris particularis $3A$ scribantur uno loco propius versus dextram quam $3Aq$;) per divisorem (inquam) ita legitime conflatum, secundum latus E querit, id est, quoties 7 in 772 ? Respondetur $7=E$; per quod demum gnomonem perficit, multiplicando divisorem per $E=7$ fit $2AE=70$; & quadrando 7 fit $49=Eq$; tum summa auferetur ex residuo potestatis resolvenda, & sic integra duorum primorum singularium laterum in duobus primis punctis contenta potestate dempta restabit ad tertium usque punctum; gnomon pro tertio similiter latere eruendo, nempe, operationem renovabis sumendo totum latus inventum 57 pro A , & per A legitime conficiendo novum divisorem, operando ut ante sub proximo puncto pro tertio latere, id est, tertia figura (id est $A=2$ in 57209) eruenda.

2. Si peracta analysi aliquid restet, punctationes circulorum, quot opus erit, statuendæ pro suo genere, id est, binæ & binæ cyphræ addantur pro quadrato, ternæ & ternæ pro cubo, &c. ut si quadratus resolvendus fuisset 3272869995, numerus non fuisset rationalis, sed post peractam ultimam operationem superfuisset 314; ideoque additis duabus cyphris vel pluribus binis, ut placuerit, ita, 314 00 00 00, possis pergere operando ut ante pro decimali fractione.

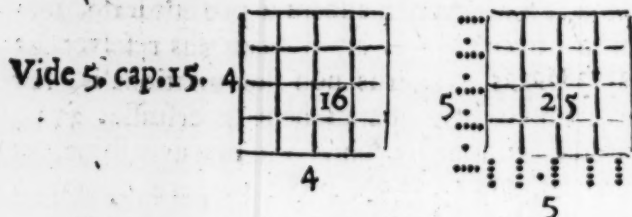
Vulgares Arithmetici volunt reliquum quod superest numeratorem esse fractionis, cujus denominator erit duplum radicis cum unitate addita, id est, $2A$ divisor cum unitate addita, quia $2A$ perfecte dividit $2AE$, & relinquitur E , sed revera præter $2AE$ continetur & Eq in gnomone.

Similiter in cubo reliquum iterum sumunt pro numeratore & pro denominatore triplum radicis quadratum $=3Aq$, & triplam radicem $=3A$, cum unitate addita.

Et revera ex quadratorum adscensu sine incremento patet ratio quare vulgares arithmetici unitatem addunt, nam esto 4 quadratus numerus ex $2=A$. $2A$ cum unitate addita, id est, 5 addatur ad 4, fit proximus quadratus 9, cujus radix $3=A$: $2A$ cum unitate, id est, 7 addatur ad 9, erit 16 quadratus ex 4, &c. unde patet quomodo series quadratorum per additionem construatur.

Atque idem patet ex his schematibus, esto 16 quadratus ex latere 4, & augeatur schema aequaliter novo gnomone hic punctato, fit proximus quadratus 25, unde quibusdam fractio gnomon appellatur, eo quod

70 Oughtredus explicatus, five,
constat ex duplici latere pro complementis & minori
diagonali quadrato.



Cubus per 6 ascendit.

| Series quadrat. | | pro serie cuborum. | |
|------------------|----|--------------------|-----|
| Radices quadrat. | | Radices cubi | |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 8 |
| 3 | 9 | 3 | 27 |
| 4 | 16 | 4 | 64 |
| 5 | 25 | 5 | 125 |
| &c. | | &c. | |

Ascendunt quadrat. ad-
dendo differentias 3. 5.
7. 9. &c. quorum diffe-
rentia est 2.

In serie cuborum 12. 18.
24. &c. quorum differen-
tia est 6, sunt differentiae
differentiarum, cuborum
nempe 7. 19. 37. 61.

Aliter

| | |
|------------------------|--------------------------|
| Aliter pro cubis | C.0.= 0 |
| Differentiæ numerorum | C.1.= 0+1+6 x 0 = 1 |
| 0.1.3. 6. 10. &c. sunt | C.2.= 1+1+6 x 1 = 8 |
| 1. 2. 3. 4. &c. | C.3.= 8+1+6 x 3 = 27 |
| | C.4.= 27+1+6 x 6 = 64 |
| | C.5.= 64+1+6 x 10 = 125. |
| | &c. |

CAP. XV. *De Lateribus surdis.*

1. **S**I quolibet numeri ut A. M. N. E sint \div erit ut primus A ad ultimum E; sic potestas primi Ac cujus index 3 per unitatem minor est numero terminorum A. M. N. E. ad potestatem similem secundi Mc cujus index etiam 3.

Nam per theor. 14. 6. hujus; AMN.MNE :: AAA (Ac) MMM (Mc.

sed MN x A. MN x E :: A. E. per 17. 7. el.

erg. ut A. E :: Ac. Mc. quod erat dem.

3. 4. Numeri plani similes sunt in duplicata ratione (hoc est, ut quadrata) homologorum laterum; consule 19 & 20. 6. el. & 11. 8. el. una cum notis in 15. 6. hujus.

Et generaliter omnes figurati similes plurium dimensionum sunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicata numero dimensionum, ex quibus componuntur; nempe si quatuor sint dimensiones A. B. C. D. unius, & quatuor E. F. G. H. alterius, erit figuratum

F 4

ABCD

ABCD ad figuratum simile EFGH in quadruplicata ratione laterum homologorum. A. E. hoc est, R. S.

sc. Rqq ad Sqq est in quadruplicata ratione R. S. hoc est A. E.

Quia $\left. \begin{array}{l} A.E :: R.S. \\ B.F :: R.S. \\ C.G :: R.S. \\ D.H :: R.S. \end{array} \right\}$ erit per multiplicationem
 ABCD.EFGH::Rqq.Sqq.
 consule 14 & 15. 6. hujus.


5. Latus numeri dicitur surdum, quando numerus non est verus sui generis figuratus, five rationalis, quo casu radix ejus exprimi nullo pacto potest in numeris, nimirum, vel sine fractione, vel cum fractione, ita ut (ex causa in quadratis) radix quadrata talis numeri in se ducta, faciat numerum quadratum cujus est radix, quod fieri oporteret; sic $\sqrt{10}$, five radix quadrata 10, est $3\frac{1}{2}$ circiter, sed $3\frac{1}{2}$ in $3\frac{1}{2}$ non faciet 10, cujus est radix; jam quoniam radix surda non potest exprimi & proinde neque audiri, appellatur surda; radix surda autem sic notatur, $\sqrt{q} 6$, $\sqrt{c} 4$, $\sqrt{qq} 20$, $\sqrt{qc} 13$, hoc est, latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13, &c. Si nota radicalis ($\sqrt{}$) per se ponatur, ut $\sqrt{5}$, intellige radicem quadratam.

16 & 9 sunt numeri figurati; & $\sqrt{16}$ est 4, $\sqrt{9}$ est 3. $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ est radix composita, & valet 7; sed quandoque intelligere potes radicem universalem; ut $\sqrt{u. (16 + 9)}$ intelligis 5 radicem è 25; scil. radix quadrata extrahatur è $\sqrt{81}$, hoc est, 9 addita ad 16, id est, è 25. Sed hæc melius discas ex usu Authorum; alii etenim aliter scribunt.

Aggreditur

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 73

Aggreditur *Oughtredus* operationes quæ fiunt circa surdas radices, *scil.* additionem, &c. quidam existiment, quandoquidem hîc & sectione sequenti multiplicatione opus est; quod ob eam causam sectiones 9. & 10. hanc præcedere debuissent, nos autem auctorem nostrum sequemur: qui,

Quoniam latera surda incommensurabilia haud aliter adduntur vel subtrahuntur quam per signa + five —, ut $r q 7 + r q 4$, & $r c 10 - r c 5$, uti liquet in sect. 8. hac sexta sectione docet, quando latera sunt commensurabilia, nempe quando sunt ut numerus ad numerum, prout de magnitudinibus demonstravit *Euclides* in 6. 10. el. sunt enim quædam magnitudines quarum habitudo five ratio unius ad alteram nullis numeris exprimi potest: sic latus quadrati est diametro ejusdem incommensurabile per ult. 10 el. nam si latus $a b$ dividas  in partes quot libuerit, puta 4, vel ullas alias $b d$ non potes dividere diametrum $a d$ in tales partes, ut in 5 vel in 6 vel in 7, vel ullo alio numero comprehensas quin semper aliquid supererit nullis numeris explicabile; atque ita latus non erit ad diametrum in ratione numeri ad numerum: sed docuit *Euclides* 12. 6. el. quomodo duæ lineæ (duæ inquam lineæ) in eadem ratione inveniantur; quinetiam nulla lineæ est cujus radix quadrata extrahi nequit, id est, exprimi nequit geometricè in alia lineæ.

Tum in hac sectione docet auctor quomodo scire potes an duo latera $r q 12$ & $r q 147$ sint commensurabilia necne, *sc.* si dividendo utrumque per maximam ipsorum communem mensuram $r q 3$, quoti fiant rationales, id est, possint exprimi in numeris; sic, divide $r q 12$
per

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 75

erg. $r18. r32 :: r9. r16 :: 3. 4$. ergo commen-
surabiles.

Jam summa ex $3 + 4$ est 7, quadretur 7, fit 49; erg.
 $r49$ erit homogenea potestas: duc igitur $r49$ in $r2$,
scil. max. com. mens. fit $r98$ pro summa quaesita.

Rem ipsam accepisti, accipe & rei rationem.

Ut addas $r147 + r12$, primo, dividis utrumque
per $r3$, max. com. mens. & oriuntur quoti $r49$ &
 $r4$; sed quod divisio dissolvit, multiplicatio conficit, er-
go si separatim ducas $r3$ in $r49$, restituetur $r147$; &
si ducas $r3$ in $r4$, restituetur $r12$; jam quoniam $r49$
 $= 7$ & $r4 = 2$ conjunctim faciunt $9 = r81$, fiet,
(ducendo $r3$ in summam, viz. $r81$,) fiet inquam, r
 $243 = r147 + r12$, uti manifestum est per 1. 2. el.
quod erat dem.

Ex 4. 2. el. demonstratur aliqualis modus addendi
radices etiam incommensurabiles, quoniam per 4. 2.
Qu. $A + E = Aq + 2AE + Eq$.

Sect. 8. Esto binomium $r7 + r4$, scil. $r7 = A$ &
 $r4 = E$ ad summam quadratorum è nominibus $r7$
 $= 7$ & $r4 = 4$, ad summam, inquam, quadratorum,
 $11 = Z$; addatur duplum è nominibus rectangulum,
hoc est, $r7$ in $r4$, fit $r28$; in $2 = r4$, fit $r112 =$
 $2AE$: erg. radix quadr. universalis hujus aggregati,
nempe $r(11 + r112)$ erit summa ex $r7 + r4$.

Et quoniam per 7. 2. el. $Aq + Eq - 2AE = Q:A$
 $- E$, subtrahendo $A = r7 - r4 = E$, differentia e-
rit $Aq + Eq = r(11 - r112) = 2AE$.

Modo operandi in quadraticis intellecto, cubicæ o-
perationes una facillime intelliguntur;

max.

$\text{rc } 1715 \left\{ \begin{array}{l} \text{rad. cub. addend.} \\ \& \text{ dividend. per} \end{array} \right. \text{rc } 343 = 7$
 $\text{max. c. m. } 15) \left\{ \begin{array}{l} \text{quoti} \\ \text{rc } 40 \left\{ \begin{array}{l} \text{rc } 15, \text{ max. c. m.} \\ \text{rc } 8 = 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$
 (numeri similes inventi.

sum. quæ sit. $\text{rc } 3645$ homog. potest. $\left\{ \begin{array}{l} \text{rc } 729 \text{ } 9 \text{ sum. nu.} \\ \text{diff. quæ sit. } \text{rc } 625 \text{ } 5 \text{ diff. nu.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{rc } 125 \text{ } 5 \text{ similium} \\ \text{rc } 125 \text{ } 5 \text{ similium} \end{array} \right.$
 ex quadratis 4×16 fit 64 : erg. per $4 \cdot 4$. hujus.
 $1 \cdot 4 :: 16 \cdot 64$. ergo;

9. Per $24 \cdot 8$. elem. 64 erit quadratum. Vide scho-
 lium Clavii in 2^d . 9. el. una cum propof. 4. 9. el. &
 cap. 15. sect. 9. hujus.

Et quoniam quadrata sunt proportion. $14 :: 16 \cdot 64$
 erg. per $22 \cdot 6$. etiam & latera sunt proport. $12 :: 4 \cdot 8$
 tum & quia per $11 \cdot 8$. quadrata
 sunt in duplicata ratione laterum: $\left\{ \begin{array}{l} 4 \times 16 = 64 \text{ quadr.} \\ 2 \times 4 = 8 \text{ latera.} \end{array} \right.$
 ergo per theorema catholicum
 quadrata & latera se similiter
 multiplicant & dividunt.

In speciebus, quadrato $Aq \cdot Eq$ diviso per quadratum,
 sc. Bq , oritur quotus, sc. $\frac{AqEq}{Bq}$ qui est quadratus ex
 $\frac{AE}{B}$ in se.

10. Quando duæ radices ejusdem generis, ut ex. g.
 quadratica, multiplicandæ aut dividendæ sunt, ut $r7$ in
 $r3$, operatio fiat in numeris sub signis radicalibus con-
 tentis, ut $(7 \text{ in } 3)$ & producto vel quoto sui generis
 signum præfigendum; ut factus ex $r7$ in $r3$ est $r21$;
 & divide $r21$ per $r7$, oritur $r3$.

Propter satisfactionem tuam facile scire potes hunc
 operandi modum esse: verum experiendo in radici-
 bus

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 77

us rationalibus ex $r\ 4 = 2$ in $r\ 49 = 7$, fit $r\ 196 = 14$
 $= 2$ in 7 .

Demonstratio autem geometrica petenda ex 22. 6.
 el. dico, ex $r\ 3$ in $r\ 7$, factum iri $r\ 21$.

nam quoniam ut $1. r\ 3 :: r\ 7$ ad factum per 4. 4. huius,
 & per 22. 6. quod $1. qu. r\ 3 :: qu. r\ 7$ ad quadratum facti.

hoc est, $1. 3 :: 7. 21$. sc. quadratum facti.

erg. $r\ 21$ fit ex $r\ 3$ in $r\ 7$, quod erat dem.

Vide Amicum meum eruditissimum, *Is. Barron* in 22. 6.

Atque jam vides cur *Oughbredus* hanc sectionem cum
 nota illativa inchoavit, sc. quare laterum surdorum, &c.

In sectione 11. accedit author ad multiplicationem
 & divisi. laterum surdorum heterogeneorum, quæ idcir-
 co prius ad idem genus reducenda fere ad eum modum
 quo fractiones ad eundem denominatorem revocantur,
 nam quemadmodum fractiones, dum ad eundem deno-
 minatorem revocantur valores suos non mutant, ita
 neque mutantur valores radicum surdarum quum ad
 idem genus revocantur: nam ut ex tabella priori patet
 $r\ cc\ 64 = r\ q\ 4 = 2$: ideoque in exemplo $r\ cccc\ 1000 = r\ qq\ 10$, & $r\ cccc\ 49 = r\ cc\ 7$, regula est, re-
 ducuntur ad idem genus dividendo indices utriusque
 potestatis propositæ per maximam ipsorum communem
 mensuram, & multiplicando tum indices per alternos
 quotos tum ipsas potestates in species alternis quotis
 cognominines, ut si ad multiplicandum vel dividendum
 proponantur $r\ qq\ 10$ & $r\ cc\ 7$, primo, reducuntur ad
 $r\ cccc\ 1000$ & $r\ cccc\ 49$, cubando 10 & quadrando 7:

In exemplo indices continentur in rectangularibus
 figuris ita, $\boxed{4}$ est index quadrato-quadraticus; 2^2 an-
 teclavellam est maxima communis mensura:

& fit

& fit operatio per crucem, ita,

max.có. m.2) $\boxed{4}$ $\begin{matrix} 12 \\ \text{index ex alterna multiplicatione} \end{matrix}$ $\boxed{6}$ indices

$\begin{matrix} 2 & & 3 \\ & \times & \\ 1000 & & \end{matrix}$ quoti

max.co.m.2. qua dividit 4 & 6) $\begin{matrix} r & \boxed{12} \\ r & \boxed{4} \end{matrix}$ $\begin{matrix} r & \boxed{12} \\ r & \boxed{6} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 49 \\ \text{potestates in species alternis quotis co-} \\ \text{nomin.} \\ \text{index potestatum reductarum, scil. 12.} \\ \text{index COEC.} \\ 7 \text{ potestates reducendae, nempe 10 \& 7.} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \boxed{2} & & \boxed{3} \\ & \times & \\ & & \end{matrix}$ quoti

1000 fit ex 10 cubato, propter alternum quotum 3, qui est index cubi; 49 fit ex 7 quadrato, propter alterum quotum 2, qui est index quadrati.

Tum demum fiat multiplicatio, ut ante ostensum est in homogen.

ex r cccc 1000 in r cccc 49 fit r cccc 49000.

exemplum esto facilius in numeris rationalibus, quod fidem faciat modum operandi in surdis esse verum;

nam ex r q 9 = 3 in r qq 16 = 2 fit 6, qui est radix qq 1296.

max. c.m. 2) $\begin{matrix} r & \boxed{4} & 81 \\ r & \boxed{2} & 9 \\ r & \boxed{1} & \end{matrix}$ $\begin{matrix} r & \boxed{4} & 16 \\ r & \boxed{4} & 16 \\ r & \boxed{2} & \end{matrix}$ potestates reductae
potestates reducendae
quoti.

ex r qq 81 in r qq 16, fit r qq 1296 = 6.

Si multiplicares surdam radicem per numerum integrum, attollendus est integer ad potestatem homogeneam, cui signum radicale sui generis praeponendum, ut ex 5 in r 9 fit r 225, attollendo integrum 5 ad 25, cui praeponere signum rad. r 25, ut ex r 25 in r 9 fiat r 225.

Si duas easdem radices quadraticas adderes, earum una multiplicetur per 2, hoc est, r 4, ut ex r 16 + r 16, erit

erit summa $r 64$; nempe si $r 16$ multiplices per $r 4 = 2$; pariter si tres easdem velles addere, multiplicabis per $r 9 = 3$; si quatuor, per $r 16 = 4$: sic in exemplo cubico $r c 32$ duplicabitur attollendo 2 ad $r c 8 = 2$, triplicabitur attollendo 3 ad $r c 27 = 3$, scil. ex $r c 32$ in $r c 27$, fiet $r c 864$.

12. In fractionibus, si $\frac{2}{3}$ multiplicares per $r Aq$, attolle $\frac{2}{3}$ ad $r \frac{4}{27}$, radix qu. quadratur, & cubica cubatur, &c. tantum delendo signum radicale, sic ex $r 64$ in $r 64$, fit 64 .

13. Si latus potestatis cujus index est numerus compositus, ut in $r cc 64$, index cc est 6 , qui componitur, sive fit ex 2 in 3 ; si igitur $r cc 64$ multiplicandum sit secundum exigentiam indicis componentis 2 , qui index quadrati, id est, si quadrandum sit, ut litera Q , indicatur ita, Q , $r cc 64$; tum, inquit author, latus alterius speciei, id est, componentis, nempe indicis 3 , id est, latus cubicum, propter 3 , qui index est cubi, numero speciali 64 solum præfigatur, ita, $r c 64$: est hæc regula contractionis causa, nam si per regulas antedictas quadrare $r cc 64$ ex $r cc 64$ in $r cc 64$, fit $r cc 4096 = 4$; est etiam $r c 64 = 4$.

Ita si $r qq 16$ quadrandum sit, quoniam $4 = 2 \times 2$ est index qq , scribe $r q 16$; quoniam 2 , altera pars componens, est index q .

14. Si magnitudo plurium nominum ducatur in seipsum cum uno ex suis signis mutato expurgabitur anum nomen: est hic locus satis obscurus: expurgabitur, id est, expungetur $+ r 2$ propter $- r 2$, tum multiplicabitur $+ r 5$ per $+ r 5$, quod ut fiat, attolle (ut ante ostensum est) integrum 3 ad $r 9$; tum

duc

80 Oughtredus explicatus, five,

duc $r9 + r5$

in $r9 + r5$

fit $r81 + r45$

adde $r45$ ad $r45$ i. e. multi-
 $+ r45 + r25$ plica $r45$ per $r4 = 2$, fiet
 $(r180$

summ. $r81 + r180 + r25$.

sed $r81$ & $r25$ sunt rationales, & valent $14 = 9 + 5$,
 ergo totus factus erit $14 + r180$: non dubitabo sec-
 tionem hanc erroris alicujus accusare, quod patet ex his
 numeris rationalibus, nam ex $3 + r9 + r4$ in $3 + r9$
 $- r4$, fit tantum 32 ; sed ex $3 + r9$ in $3 + r9$, fit 36 .
 ex $A + E + B$ in $A + E - B$, fit $Aq + 2E + Eq - Bq$
 sed ex $A + E$ in $A + E$, fit $Aq + 2E + Eq$; post
 expurgationem ergo tollendum Bq , nempe in exem-
 plo $= 2 = Qu. r2$. tollend. inquam ex facto $14 + r180$,
 ut fiat $12 + r180$.

Numeri compositi sequuntur regulas simplicium.

Radices universales multiplicantur ut compositæ,
 præponendo tandem signum universale, ut ex $r(7 +$
 $r3)$ in 2 , fit $r(28 + r48)$ attollendo 2 ad 4 , & tum
 multiplicando $7 + r3$ per 4 , præfigendo demum sig-
 num radicale; sed vide sis, ut 4 attollatur ad $r16$
 quando multiplicas $r3$ per 4 ; atque idem observan-
 dum erit in sequenti exemplo pro duplo rectangulo.

Adduntur plerumque & subtrahuntur per signa $+$ &
 $-$, vel addantur radices (præsertim quando similes
 sunt) per signum $+$, vel plus, ut sint tanquam duo no-
 mina, & tum per 4 & 7 . el. 2 . ad summam quadrato-
 rum addes, vel auferes, duplum rectangulum, ut si ad-
 dendæ sint hæ duæ radices universales $r(12 + r6)$

& $r(12$

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 81

& $r(12 - r6)$ ducatur hoc compositum $r(12 + r6) + r(12 - r6)$ in seipsum, & producetur numerus $24 + r552$ hujus radix quadrata, nimirum $r(24 + r552)$ erit summa duarum radicum propositarum, nam radix quadrata facti ex summa in se ducta est ipsa summa.

Sepositis nostris, poteris proprio Marte experiri, quomodo numerus praedictus, viz. $24 + r552$ multiplicando producitur, si forte haeris, est enim accurata observatio regularum, quandoque lubrici negotii, legeris haec quae sequuntur.

Nempe singula nomina quadrantur abjiciendo signa radicalia, & summa quadratorum erit $12 + r6 + 12 - r6$; id est, expungendo $r6$, propter signa $+$ & $-$, erit, inquam, summa. quadr. = 24 .

Tum, pro rectangulo, ex nominibus duc $r. n. 12 + r6$ in $r. n. 12 - r6$, fiet $r(144 - r36)$, * viz. expunctis expungendis; & pro duplo rectangulo multiplicando per $2 = r4$, multiplica 144 per 4 , fiet 576 , nondum apponendo signum radicale, sed prius multiplicando $r36$ per 4 , id est, per $r16$, fiet $r576$, cujus radix quadrata, viz. 24 , sublata ex 576 , rest. 552 , cui demum signum radicale praefigendum $r552$, adeo ut $24 + r522$ sit nominum additorum vel binomii quadratum.

Videbis modum elegantem binomiorum quadrand. c. 16. sect. 10. ex. 1.

Species eadem regulas servant ad amissim;
 $rDAAA$ & $rDABq$ sunt commensurabiles quia habent communem mensuram, scilicet rDA , per quam di-

* Vel sic, fiet $r(144 - r36)$ id est, $r108$, quia $r36 = 6$. Et pro duplo rectangulo ex $r108$ in $r4 = 2$ fiet $r552$.

vidantur, & quotientes erunt rationales, $\int c. r Aq=A$
& $r Bq=B$.

Exemp. add. & sub. in speciebus.

max. c. m. r DA) r DA c. radices r Aq } quoti = A } numeri
r DA Bq furda r Bq } = B } fines
invent

$A+B$ sum. r. n. $Aq+2AB+Bq$. Homogenea potestas
 $A-B$ diff. r. n. $Aq-2AB+Bq$. Homog. pot. multiplicentur potestas
 res per max. com. men.

erit $r \cdot n \cdot DAc + 2DAqB + DABq$. Summa quæ sita

& $r.u.DAc - 2DAqB + DABq$. Differ. quæf.

Aliud exemplum, r 75Aq & r 27Aq.

max.c.m. r 3) $\left. \begin{array}{l} r 75Aq. r 25Aq = 5A \\ r 27Aq. r 9Aq = 3A \end{array} \right\}$ Latere quorum rationalium, seu numeri
similes inventi.

8A sum. r 64Aq Homog. pot. r 192Aq. Sum. quæfita
2A diff. r 4Aq Homog. pot. r 12Aq. Differ. quæfita.

ad r 12 Aq adde $r \frac{27}{4}$ Aq, five $r \frac{27}{4}$ Aq reducantur ad e-

andem denomination, & scribe (per c.g.i.) $r \frac{48 \text{ Aq}}{4}$

+ 27Aq tum in numeratoribus partium fiet operatio,

ut ante, dividendo per 3, max. com. mens. tandem
subscribendo communem denominatorem.

Ad r C adde r $\frac{Aqc}{Bq}$ reducantur ad eandem denom.

ut sint $r \frac{CBq}{Bq}$ & $r \frac{Aqc}{Bq}$ & fiat in numeratoribus partium

operatio dividendo per max. com. m. nempe r C.

fit exem. in rationalibus $A=3$. $16Aq=64$ cujus radix 8 sum. 12.
ad r. $16Aq$ adde $3A=9$ $4Aq=16$ cujus radix est 4

$$\left. \begin{array}{l} \text{max.c.m. } r 4 \text{ Aq. } r 16 \text{ Aq. } r 4 \\ r 4 \text{ Aq. } r 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{quoti} = 2 \\ = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{numeri fi-} \\ \text{miles.} \end{array}$$

sum. 3 = r 9 in max. c. m. = r 4 Aq fit 36 Aq = r 144 = r 2.

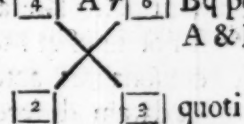
Commentarius in ejus Clavem Mathem. 83

ad $r \frac{8}{2}$ adde $r \frac{128}{2}$ ejusdem denominationis $2 + 8 = 10$.

max. c. m. $r 8$ $r 1 = 1$ } Sum. 5 Hom. pot. $r 25$
 $r 128 r 16 = 4$ } in $r 8 = r \frac{400}{2} = 10$.

Similiter operandum in radicibus cubicis, &c.

Pro multiplicatione speciosa esto Authoris exemplum :

$r \boxed{12} \text{Ac}$ $r \boxed{12} \text{Bqq}$ potestates in species
 alternis quotis cognoscantur.
 max. c. m. $\boxed{2} r \boxed{4} A r \boxed{6} \text{Bq}$ potestates ipsæ, viz.
 A & Bq cum indicibus

 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ quoti

Ex quoto 2, alterne multiplicato per indicem 6, fit 12, idem 12 fit ex quoto 3, alterne multip. per indicem 4.

$r 12 \text{Ac}$, juxta indicis 12 exigentiam, est $r \text{cccc Ac}$, & $r 12 \text{Bqq}$ est $r \text{cccc Bqq}$.

A ascendit ad Ac, propter alternum quotum 3, indicem cubi; & Bq ascendit ad Bqq, propter alternum quotum 2, indicem quadrati.

Tum demum fiat multiplicatio vel divisio: ex $r \text{cccc Ac}$ in $r \text{cccc Bqq}$, fit $r \text{cccc Ac Bqq}$.

Ad multiplicandum integrum sive rationalem $A+B$ per $r D$, attolle $A+B$ ad quadratum signum radicale præponendo, ita,

$r. \text{AAq} + 2AB + \text{Bq}$ in $r D$, fit $r. \text{DAq} + 2ABD + \text{BqD}$.

Radices compositæ observant regulas simplicium.

CAP. XVI. De *Æquatione*.

1. **Æ**quatio est æqualitas quantitatum, quando eadem quantitas duobus modis exprimitur, ut,
 $Z = A + E$. $Zq = Aq + 2Æ + Eq$.

Quotiescunque igitur problema aliquod sive quæstio proponitur, ex.gr. Data differentia duorum laterum & summa eorundem invenire latera; ad hujus problematis resolutionem, id est, ut possis latera invenire, oportet quæsitum latus, ac si notum esset litera aliqua vocali, puta A, designare; consonantes autem distinctionis causa datam summam & datam differentiam significabunt: ut, pro summa scribe Z, pro differentia X, tanquam problema ita propositum fuisset, esto $X = 40$ & $Z = 100$.

Datis Z & X duorum laterum, invenire A; hac tenus operando, ac si dixisses, Ego nescio quid sit illud latus majus, sed quicquid sit, præsumam de illo, ac si scirem; & esto A, terminis ita notatis, restant in multis æquationibus quatuor agenda.

1. *Æquationis constitutio*; 2. *Æquationis reductio*; 3. *Ejusdem resolutio*; 4. *Et quandoque extractio radicis*.

1. Quod ad æquationis constitutionem attinet, vult Author in Sect. 2. ut magnitudines tam datæ quam quæsitæ, secundam conditionem quæstionis convenientem efformentur; nempe, oportet terminos quæstionis profunda meditatione contemplari, atque animo susq; deq; revolvere, ut tandem valeas æqualitatem aliquam formare; neque enim hæc ars promittit extemporaneam quorumvis

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 85

rumvis anigmatum solutionem; nempe, in proposito problemate tecum aptam ratiocinationem hoc pacto adhibebis: Certe si ex summa laterum $= Z$ tollatur latus majus $= A$, necessario residuum erit latus minus, $Z - A = E$; ideoque neglecto jam E pro latere minore, ejus loco in posterum substituam $Z - A$; & quoniam differentia quæ mihi in quæstione datur $= X$, obtinetur etiam, subducendo latus minus è majore; minore latere $Z - A$ subducto a majore A , mutando signa minoris, rest. $A + A - Z$, hoc est, $2A - Z = X$; atque ita æquatio quædam constituta est: Verum hætenus prima tantum operatio peracta est, circa quam quidem maxima plerumque premit difficultas; enimvero in quibusdam problematibus resolvendis, quamvis in hac arte fueris versatissimus, erit tandem quandoque altum dies noctesque meditandum, more *Vietano*, capite inclinato & manibus suffulto: Multa peritia opus erit in Geometria & geometricis tractandis; nimirum, ut non modo rationes & proportionem notas habeas, sed adeo familiares ut in usum proferre promptus sis; in quibusdam quidem quæstionibus ipsi problematum termini, regia via, ducunt analytæ, ad æquationem facile parabilem; scil. operando secundum conditionem quæstioni convenientem, mox æquationem efformabit, in aliis autem non ita; verbo dicam, quo quisque fuerit theorematum tum *Euclideanorum* tum speciosorum supellectile ornatio atque instructior eo sagacior sphynx in problematibus resolvendis futurus: Ut Lector intelligat quæ sequuntur, noverit saltem, quod datis (rectangulis triangulis planis) quadratis Catheti & Basis, datur etiam quadratum hypotenuse per 47. 1. Et si dentur

duo anguli, datur etiam & tertius per 32. 1. Et data ratione laterum, datur & ratio quadratorum per 20. 6. &c. & penum Authoris in c. 11, & 18.

Quando plura sunt quæsitæ, id est, in hac arte inprimis observandum quomodo nominentur, ut hic vides me ratiocinando invenisse modum exprimendi latus minus non per aliam vocalem E, sed per Z—A; pariter si fieri possit tentandum est ut secundum quæsitum, &c. exprimas per primum & alias magnitudines datas quæ per consonantes significantur, quod, quando fieri non potest, tot sint constituendæ æquationes quot fuerint quæsitæ magnitudines, solet *Cartesius* nominare magnitudines datas per primas literas alphabeti, a, b, c, &c. & quæsitæ per ultimas y, z, x; sed id unicuique liberum erit; nos Authorem nostrum sequimur.

2. Habuimus jam æquationem inventam sive constitutam, scil. $2A - Z = X$: sequitur secunda operatio, quæ consistit in reductione æquationis, quia nempe in omni æquatione ubi primum ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur, uti in hac æquatione $2A - Z = X$; quæsitæ magnitudo A stat non sola sed una cum 2 in A, & — Z; ideoque in hoc & similibus casibus termini æquationis sunt comparandi addendo, subtrahendo, multiplicando & dividendo; atque ita ordinandi, ut A sola ex una parte æquationis habeatur, nempe addendo Z ad utramque partem, fit $2A = X + Z$; & dividendo utramque partem per 2, fit $A = \frac{X + Z}{2}$ eritque $A = 70$; tum, invento latere majore, mox invenitur latus minus $Z - A = 100 - 70 = 30$; itaque in omnibus æquationibus laborandum, ut A sola
vel

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 87

vel aliqua ejus potestas ad quam ascendit, ut Aq, Ac, sola stet ex una parte æquationis.

Reductionis causa, 5 regulas hic tradit *Ongburedus*, per quas termini æquationis mutari possint, æqualitate inter terminos æquationis manente.

1. Prima operatio vocatur à *Vieta* isomeria, & fit ope multiplicationis, nam æqualia si æqualiter multiplicentur, manebunt æqualia producta, ut,

$$A - C = \frac{Aq + Bq + B + C}{D}.$$

Hic Aq, gradus magnitudinis quæ sita, est in fractione, ergo, ut liberetur, ducatur utraque pars æquationis in D, denominatorem fractionis, fiet $AD - CD = Aq + Bq + BD + CD$: quia ipsa fractio multiplicatur per D, solum delendo D, ut Capite 10. docuimus, & si placeat per 1. 9. hujus revocentur omnia ad $\frac{AD - DC}{D}$

$\frac{Aq + Bq + DB + DC}{D}$ quoniam ergo denominator D est utrobique idem, potest negligi, vel multiplicando fractiones per D, abjiciatur D, ut diximus.

2. Secunda operatio vocatur à *Vieta* antithesis, & fundatur in hoc principio, si æqualibus addas vel subtrahas æqualia erunt æqualia; si ergo $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$: addatur DC utrique parti, & erit $DA - DC + DC = Aq + Bq + DB + 2DC$, vel in hujus prima parte expuncta — DC propter + DC: erit $DA = Aq + Bq + BD + 2DC$, nimirum idem evenit ac si mox transposuisses — DC in alteram partem sub signo contrario, sc. + DC: tum ex utraque parte tolle Aq; erit $DA - Aq = Bq + BD + 2DC$.

3. Parabolismus est quando species altissima quæsitæ, ut Aq in BAq ducitur in magnitudinem aliquam datam, ut in B datam, quo casu si divides æqualia per æqualia quotientes æquales erunt, ut, quoniam $BAq+BqA=ZC$, divide utrobique per B , & erit $Aq+BA=\frac{ZC}{B}$

4. Hypobiasmus est etiam divisionis operatio; quando contingit omnes magnitudines datas duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ, fiat omnium per adplicationem ad minimam speciem secundum ordinem tabellæ communis depressio; ut $Aqq+BAC=ZqAq$, expuncto in singulis Aq , quia expungere est dividere, ut ante docuimus, oritur $Aq+BA=Zq$.

5. Ultima operatio, si magnitudo aliqua sit latus surdum, æquatio in ipsis potestatibus est instituenda, vocatur à *Vieta* ascensus climacticus, & fit ope multiplicationis; si $r q BA=C-B$, ideoque ipforum quadrata $BA=Cq-2CB+Bq$; quia $r q BA$ quadratur solum abjiciendo signum radicale, & fit BA : tum dividendo utramq; partem per B , erit $A=\frac{Cq-2CB+Bq}{B}$.

item $r. n.$ $BA+CA=D+B$; ergo quadrando utramque partem, fit $BA+CA=Bq+2BD+Dq$: per $r. n.$ $BA+CA$ intelligit non radicem BA , sed radicem universalem $BA+CA$. Denique $r q \frac{A}{3} = r c 2A$, consule

II. 15. hujus; quia index quadrati 2, & index cubi 3, quia, inquam, 2 & 3 sunt in minimis terminis, hic quotus alternis non opus erit, sed immediate reducuntur ad idem genus, ducendo 2 in 3, unde fit 6, index $c c$; tum alterne cubando $\frac{A}{3}$, fit $\frac{A^3}{27}$, & quadrando $2A$, fit $4Aq$,

ita

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 89

ita erit $r \text{ cc } \frac{Ac}{27} = r \text{ cc } 4Aq$; tum cubo-cubando utramque partem, quod fit abjiciendo signum radicale $r \text{ cc}$, erit $\frac{Ac}{27} = 4Aq$, duc utramque partem in 27, erit $Ac = 108Aq$; divide utramque partem per Aq erit $A = 108$.

Huc pertinet climacticus descensus, quando æquatio in potestatum radicibus instituitur, ut si $BA = Cq - 2CB + Bq$; ergo erit $r BA = C - B$.

Æquationes non sunt omnes unius generis; quandoque per has 5 operationes æquationes ita ordinari possint ut solum A (vel aliqua ejus potestas ad quam ascendit, ut Aq Ac Aqq , &c.) stet ex una parte, & solummodo consonantes five quantitates datæ ex altera; si æquatio ita staret $A = B + C - D$, facile noveris valorem A , quia habes ex altera parte magnitudines datas illi æquales: si ita $Aq = Bc + cD$, facile etiam A habebitur, sc. extrahendo radicem quadratam ex notis quantitatibus $BC + CD$, per c. 14. hujus; atque hujusmodi æquationes vocantur puræ, quarum exempla sint hæc quæ sequuntur.

Ex. 2. Data differentia duorum laterum $X = 12$, & ratione eorundem ($R. S = 3. 2.$) sesqui altera invenire latera. Puta præstitum esse quod postulatur, & esto majus latus A , jam adhibeo aptam ratiocinationem, & mecum attentius confidero, quomodo per has species latus minus designari possit. Certe quum latus majus sit A , quodcunque illud fuerit, si differentia quæ hic mihi datur $X = 12$ tollatur ex A majore latere, necessario relinquetur minus latus; ergo minus latus erit $A - X$; & quoniam in problemate proposito ratio horum

90 *Oughtredus explicatus, five,*

rum laterum datur, *sc.* ut R ad S ; erit ergo $R : S :: A$.
 $A - X$: hic effulget æquatio; nam quia factus ab extremis æquatur facto à mediis, ergo $SA = RA - RX$.

Reducetur hæc æquatio & per antithesin $SA + RX = RA$: & iterum per antithesin $RX = RA - SA$: & per parabolismum, dividendo utramque partem per $R - S$ $\frac{RX}{R - S} = A$, sed $\frac{RX}{R - S} = 36$, ergo A latus majus $= 36$:
 ergo latus minus $A - X = 24$: & $36 : 24 :: 3 : 2$.

Mecum ratiocinando reperio opus absolvi posse exprimendo etiam minus latus per $\frac{SA}{R}$, nam quoniam habeo

inter latera rationem datam, erg. ut $R : S :: A : \frac{SA}{R} =$

minori lateri, per 11. cap. hujus. Ergo $\frac{SA}{R} = A - X$

erg. per isomeriam multiplicando utramque partem erit $SA = RA - RX$, & per antithesin $RX = RA - SA$, &

per parabolismum $\frac{RX}{R - S} = A$. quoniam per 11. hujus

$E = A - X$, atque etiam $E = \frac{SA}{R}$ ergo $\frac{SA}{R} = A - X$.

Ex. 3. Dato rectangulo sub lateribus $B = 20$, & ratione laterum $R S$, invenire latera $R = 5$ & $S = 1$; puta præstitum esse quod postulatur, & esto majus latus A , quoniam datur ratio laterum; secundum conditionem quæstioni convenientem ita ratiocinor, (terminos tam quæritos quam datos comparando,) ut $R : S :: A : \frac{SA}{R} =$
 minori

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 91

minori lateri; ergo ex A majori in $\frac{SA}{R}$ minus fit rectangulum $\frac{SAq}{R}$, sed rectangulum B datur in problema-
te, ergo duobus modis exprimitur, & habeo æquationem inventam $B = \frac{SAq}{R}$; ergo per Isomer. $BR = SAq$,
& per parabolismum $\frac{BR}{S} = Aq = 100$; ergo extrahendo radicem, $10 = A$ majori, $\frac{SA}{R} = 2$ minori.

Ex. 4. Invenire tres numeros continue proportionales in ratione data $R.S. = 4. 1.$ ita ut ex inventorum numerorum continua multiplicatione gignatur datus numerus $B = 1728$. Primus esto A, quoniam (ut vult quæstio) secundus est in ratione quadrupla ad primum, erit ergo secundus $4A$, & tertius est in ratione quadrupla ad secundum, ergo tertius erit $16A$: ergo tria latera sunt A, $4A$, $16A$. Secundum conditionem problematis ducantur in se continue. Ex A in $4A$ fit $4Aq$; ex $4Aq$ in $16A$ fit $64Ac$; ideo per quæstionem $64Ac = B$; ergo per parabol. $Ac = \frac{B}{64} = 27$; & extrahendo radicem cubicam $A = 3$; & numeri sunt 48, 12, 3, & $48 \times 12 \times 3 = 1728$.

In hoc exemplo vides quomodo tres numeri quæfiti nominantur per unam speciem A; non per alias duas vocales E & I.

Ex. 5.

Ex. 5.

*Acer in Amonia fugientem valle Lycisca,
 Insequitur leporem picta per arva vagum;
 Hic decies quinis præcedit saltibus, ille
 Instat, & exultans, per juga letaruit.
 Dumque quater saliendo lepus consurgit in altum,
 Hic toties ternis saltibus evehitur;
 At tantum geminis percurrit saltibus agri
 Interea quantum conficit ille tribus.*

*Dic mihi jam quoties saltus iterante Lycisca
 Contigit infesto prada petita cani.*

Hoc problema in numeris (pro regula falsi, quæ cum Algebra magnam habet affinitatem) mihi propositum est in exemplum ab amico meo, *Georg. Attawello*, Erudito Mathematico, qui me primus docuit in Arithmetica vulgari, ejus resolutionem in speciebus algebraicè ita accipe.

Leporis ante lyciscam passus $50 = B.$

Lepus quater salit dum canis ter $R. S = 4. 3.$

At canis duo saltus dant tres leporis $M.N = 2. 3.$

Esto $A =$ numero passuum canis; ergo ratiocinando invenio quod $S. R :: A. \frac{RA}{S} =$ numero passuum leporis,

& addendo B. ad $\frac{RA}{S}$ erit $M. N :: A. \frac{RA + SB}{S} =$ summ. totalis passu. lepor.

Ergo per theorema catholicum $NA = \frac{MRA + MSB}{S}.$

per isomeriam erit $SNA = MRA + MSB.$

per antithes. $SNA - MRA = MSB.$

per parabolis. $A = \frac{MSB}{SN - MR} = 300, \& \frac{RA}{S} = 400.$

Ter

*Ter centum passus currit canis ille Lycisca,
Et quadringentos praeda petita facit ;
Sic quatuor terminis saltus quadrare videntur,
Et duo dant timidi tres numero leporis.*

Hæc de puris æquationibus hætenus, verum enim-
vero quandoque torque æquationes, ut libuerit, nun-
quam illas ita reduces ut habueris magnitudinem qua-
sitam solummodo ex una parte, sed vel ipsa magnitu-
do vel aliquis parodicus ad altissimam magnitudinis
potestatem gradus miscebitur cum magnitudine data, &
æquatio stabit in hunc modum, vel similiter.

Hic vides magnitudinem
quæsitam A, vel gradum ejus $Aq + AB = DC$
scansorium Aq, mistam cum $Aq - AB = CF$
magnitudine data, id est, Aq $Ac + BAq = BCD$
ductum in B, neque ope præ- $Aqq + CqAq = BqCq$
dictarum regularum potest fieri

liberatio; hujusmodi æquationes appellantur adfectæ,
quæ duum generum; vel enim æquationes adfectæ æ-
qualiter ascendunt in ordine scalæ, vel inæqualiter.

Quid est autem æqualiter ascendere?

Meministi proculdubio quod potestates omnes A,
Aq, Ac, &c. indices suos habent correspondentes 1,
2, 3; jam æqualitas hæc vel inæqualitas ab indicibus
assumenda: si nempe indices ascendant æqualibus ex-
cessibus, id est, in ratione arithmetica, quæ & in hoc
negotio est semper indicis maximi ad medii dupla, ut
in exemplis; ita,

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ Z A & - A q & = \text{Æ} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 0 \\ Z \text{>} A q & - A q q & = \text{Æ} q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 0 \\ \text{^} Z A c & - A c c & = \text{Æ} c \end{array}$$

&c.

$$Z E - E q = \text{Æ}$$

$$Z \text{>} E q - E q q = \text{Æ} q$$

$$\text{^} Z E c - E c c = \text{Æ} c$$

&c.

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ A q & - X A & = \text{Æ} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 0 \\ A q q & - X \text{>} A q & = \text{Æ} q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 3 & 0 \\ A c c & - \text{^} X A c & = \text{Æ} c \end{array}$$

&c.

$$E q + X E = \text{Æ}$$

$$E q q + X \text{>} E q = \text{Æ} q$$

$$E c c + \text{^} X E c = \text{Æ} c$$

&c.

In hac æquatione $E c c + \text{^} X E c = \text{Æ} c$ sunt tres species, prima $\text{Æ} c$ rectangulum, ex $A c$ in $E c$; media est $\text{^} X E c$, ex differentia cuborum ducta in cubum minoris; altissima species $E c c$ est cubo-cubus minoris.

Et hæ tres species ascendunt æqualiter, quia index rectanguli $\text{Æ} c$ est 0; quia rectangulum in scala neque est radix, neque quadratum, neque cubus, &c. ideoque pro absoluto numero habetur ab unitatibus quas continet æstimando, meritoque habet pro indice 0 circulum, qui unitatum loco appropriatur; qui rectangulum in numeris describere solent, ut $A q - 2 A = 8 N$, literam N numerum absolutum significantem apponunt: tum index mediæ speciei $\text{^} X E c$ (in qua data magnitudo (quæ per consonantem $\text{^} X$ exprimitur, & co-efficiens appellatur) ducitur in cubum magnitudinis quasitæ) est ratione cubi 3, qui numerus 3 excedit cyphram 0 per 3: tum ultimo, index altissimæ speciei $E c c$ est 6, qui excedit 3 per 3; ita ascendunt indices harum trium specierum æqualibus excessibus 0, 3, 6.

Hic autem sciendum quod (inter operandum) nunquam habueris æquationem resolvendam, descriptam exactè in ulla harum formarum, ex. gr. $Eq + XE = AE$; nullo pacto enim rectangulum vocalibus exprimitur, quia dari supponitur; sed ita, $Eq + XE = B$, vel $Eq + XE = Bq$, vel $Eq + XE = Bc$: intelligendo $Bc = 24$ ac si esset rectangulum AE , ex duæu $4 = E$ in $A = 6$: quinetiam inter operandum sæpe supprimitur, & quasi filet X , æquatione ita descripta, $Eq + DE = BC$; subintelligendo quod D in hac æquatione est differentia laterum, nempe $X = 2$.

Imo quanquam pro latere majore scribere solemus A , pro minore E , sæpissime tamen fit (quod diligenter observabis) ut per ipsam speciem A subintelligere debeas minorem E ; ita possis, si velis, pro $Ecc + ^{-}XEc = Ec$ scribere $Acc + ^{-}XAc = Bcc$, intelligendo per Bcc forte 13824, rectangulum, ex Ac in Ec , cujus lateris minoris, sc. Ac , radix cubica erit $A = 4$; majoris, rad. cub. erit 6; ideoque & per Acc subintelligendus cubo-cubus minoris radice, ut postea intelliges planius, quia in operando priusquam noveris an magnitudo quæ sita fuerit major vel minor, possis scribere ex voluntate tua pro magnitudine quæ sita A , dicens, Puta præstitum esse quod postulatur, & esto A , tum eventus operis docebit an A fuerit majus vel minus latus rectanguli, ut mox (inquam) planius intelliges.

Est autem æquatio hæc adfecta ita exprimenda, est nempe cubo-cubus Ecc adfectus adjunctione solido-solidi ^{-}XEc sub cubo lateris Ec , & co-efficientè scilicet ^{-}X .

In seriebus æquationum supra descriptis, secundæ & tertiæ hanc habent genesis, quia per 11. cap. facile patet quod $Z\circ - Aq = Eq$ ducatur utraque pars in Aq , erit $Z\circ Aq - Aq\circ = \bar{E}q$, $\bar{Z} - Ac = Ec$ ducatur utraque pars in Ac erit $\bar{Z}Ac - Acc = \bar{E}c$, & quemadmodum ibidem patet quod $\frac{Z+X}{2} = A$, ita etiam $\frac{Z\circ+X\circ}{2} = Aq$ & $\frac{\bar{Z}+\bar{X}}{2} = \bar{A}c$.

Quotiescunque igitur proponitur æquatio constans ex tribus speciebus æqualiter in ordine scalæ ascendentibus, cogitabis magnitudinem absolutam datam esse rectangulum sub duabus magnitudinibus quæsitis, sive latera sint ut AE , sive quadrata ut $\bar{E}q$, sive cubi ut $\bar{E}c = AcEc$, &c. qualis, scilicet, est potestas mediæ speciei; quod si altissima species Aq sit negata in hac æquatione $ZA - Aq = \bar{A}E$, est Aq negata, id est, $-Aq$, tum co-efficiens Z in mediâ specie ZA erit summa magnitudinum quæsitarum, & de utraque exponetur; id est, de utraque magnitudine rectangulum $\bar{A}E$ componente nempe tum A majore latere tum E minore; urgebis adhuc, quid est exponi? Respondeo, Exponetur, id est, explicabitur, juxta regulas sequentes; & quod ad summam attinet, juxta primam eruetur, tum A major radix, tum E minor; ideoque quando altissima species est negata, ut $ZA - Aq = \bar{A}E$, sive in operando $BA - Aq = Cq$, æquatio hujusmodi duas habebit radices, nempe,

$$\frac{Z}{2} + r. n. \frac{Zq}{4} - \bar{A} = A \text{ majori.}$$

$$\text{ \& } \frac{Z}{2} - r. n. \frac{Zq}{4} - \bar{A} = A \text{ minori.}$$

Et utraque radix æquationi $BA - Aq = Cq$ satisfaci-
et; ita ut si exponatur de majori erit $BA - Aq = Cq$;
etiam

etiam si de minori erit $BA - Aq = Cq$; obiter, quando ad regulas ventum erit, observato lineolam, *scil.* — sub +, ita, $\frac{1}{2}Z \pm r. n.$ &c.

At si altissima species sit affirmata, co-efficiens erit magnitudinum quæsitæ differentia, ipsa autem species exponetur de majori, si media species negetur, id est, si sit $Aq - BA = Cq$: hic $-BA$ est negativ. & in hoc casu regula secunda dabit utrumque latus rectanguli; sed profecto solummodo majus æquationi satisfaciet *r. n.* $\frac{Xq}{4} + \mathcal{E} : + \frac{X}{2} = A$ majori; vel in æ-

quatione proposita $B = X$; erg. *r. n.* $\frac{Bq}{4} + Cq : + \frac{B}{2} = A$ majori.

Sin autem media species etiam affirmetur, species exponetur de minore, ut, $Aq + BA = Cq$; hic $+BA$ est affirmat. ergo solummodo minus latus in hoc casu æquationi satisfaciet & per negativam partem regulæ secundæ, *r. n.* $\frac{Xq}{4} + \mathcal{E} : - \frac{X}{2} = A$ minori.

Supponitur in æquatione reducta dari una cum rectangulo vel summa vel differentia, ut, $BA - Aq = Cq$ datur rectangulum $= Cq$, quanquam magnitudines ex quibus componitur quæruntur; datur etiam & summa $= B$, quia $-Aq$ altissima species est negata.

Tum datis binarum quæsitæ magnitudinum summa & rectangulo, datur differentia earundem; vel data differentia & rectangulo, datur summa: nam per 2. Cap. 11.

$Q \frac{1}{2} Z - \mathcal{E} = Q \frac{1}{2} X$ } $Q \frac{1}{2} X + \mathcal{E} = Q \frac{1}{2} Z$ } quare $\left\{ \begin{array}{l} r. n. \frac{1}{4} Zq - \mathcal{E} = \frac{1}{2} X \\ r. n. \frac{1}{4} Xq + \mathcal{E} = \frac{1}{2} Z \end{array} \right\}$ per 8
capitis.

H

Roga-

Rogabis, quomodo fit $Q\frac{1}{2}Z : -\mathcal{A} = Q\frac{1}{2}X$.

Resp. per 2. 11. hujus, $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = \mathcal{A}$.

ergo per 4. 2. el. $Qu.\frac{1}{2}Z : -Qu.\frac{1}{2}X = \mathcal{A}$.

ergo per antithesin, $Qu.\frac{1}{2}Z : -\mathcal{A} = Q\frac{1}{2}X$.

ergo p. climact. desc. r. u. $\frac{1}{4}Zq - \mathcal{A} = \frac{1}{2}X$.

Quod quadrans quadrati alicujus lineæ æquatur quadrato semissis ejusdem lineæ per 4. 2. El. apparet ex hoc schemate



bifecetur AD in B.

$$A \quad B \quad D \quad \frac{1}{4}Q:AD = Qu:\frac{1}{2}AD = Qu:BD.$$

Denique datis binarum magnitudinum, $\frac{1}{2}Z$ & $\frac{1}{2}X$, dantur ipsæ magnitudines hisce duabus regulis,

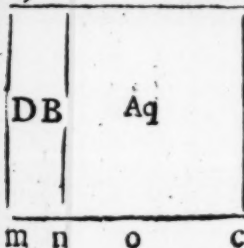
$$1. \text{Reg. } \frac{1}{2}Z \pm r. u. \frac{1}{4}Zq - \mathcal{A} : (\frac{1}{2}X) = \frac{A}{E} \left\{ \begin{array}{l} \text{quia per 2. 11.} \\ \frac{Z}{2} \pm \frac{X}{2} = \frac{\mathcal{A}}{E} \end{array} \right.$$

$$2. \text{Reg. } r. u. \frac{1}{4}Xq + \mathcal{A} : (\frac{1}{2}Z) \pm \frac{1}{2}X = \frac{A}{E}$$

Harum regularum demonstratio geometrica diversimode construi potest: ipse author modum unum exposuit cap. ult. probl. 24, 25. sic etiam breviter omnes casus ab *Euclid.* 5. 2. el. demonstrantur.

Sunto magnitudines sive radices quæsitæ $n c = A$ majori, $m n = E$ minori, $z = m c$. $\frac{1}{2}z = o c = mo$.

A



propter constitutionem æquationis fiat $DB + Aq = CA =$ toti rectangulo per 3. 2 el. ergo per antith. $DB = CA - Aq$.

quærat major.

Propter

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 99

Propter resolutionem æquationis, exponatur per 4.
2. el. quod $Q_1. \frac{1}{2} Z = m o$ est $= \frac{1}{4} Zq$; & quod rect-
angulum $m n c$ sub inæqualibus segmentis sit per con-
structionem $= DB$.

$Qu. m o = m n c + Q. n o.$ per 5. 2.
erg. $\frac{1}{4} Zq = DB + Q. n o.$ per expositionem.
erg. $\frac{1}{4} Zq - DB = Q. n o.$ per antithesin.
erg. $r. u. \frac{1}{4} Zq - DB = n o.$ per climactic. descensum.
erg. $\frac{1}{2} Z = oc + r. u. \frac{1}{4} Zq - DB (= n o = \frac{1}{2} X)$ est $= n c$ maj.
nempe $o c + n o = n c$ majori.

A

| | |
|----|----|
| Aq | DB |
|----|----|

 quærat minor $A = m n$; &
m n o c constituatur per 3. 2. el. & an-
tithefin $CA - Aq = DB$.

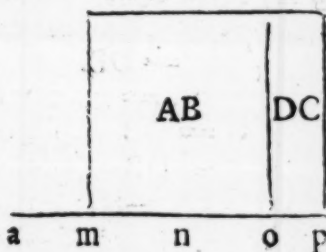
Erg. per 5. 2. el. per expositionem, antithesin &
climacticum descensum, ut prius, erit $\frac{1}{2} Z = m o -$
 $r. u. \frac{1}{4} Zq - DB (= n o = \frac{1}{2} X)$ est $= m n$ minori;
hoc est, $m o - n o = m n$ minori.

Est hic casus primus in quo dualis radix exigitur,
sequitur secundus.

Quando altissima species est affirmata & media ne-
gata, sunt quæsitæ magnitudines $A = m p$ majori,
 $E = o p = a m$ minori, differentia erit $m o = X = B$.

Quadretur $mp = Aq$, & constitutur æquatio per 2. 2.

$\bar{A} + Ax = Aq$
 five $BA + DC = Aq$
 erg. $DC = Aq - BA$. Per
 antithesin æquatio ita re-
 solvitur.



Quoniam $mpo + Qu.no = Qu.np$. per 6. 2.
 erg. $Dc + \frac{1}{2}Xq = Qu.np$. per expositionem.
 erg. *r. n.* $\frac{1}{2}Xq + Dc = np$. per climact. desc.
 erg. *r. n.* $\frac{1}{2}Bq + Dc$ (hoc est, $np = \frac{1}{2}Z$) + mn
 (hoc est, $\frac{1}{2}X$) est = A majori; nempe, $np + mr =$
 mp hic major sola æquationi satisfacit: nam intelli-
 gendo op minorem esse = A ; non erit $Dc = Aq$
 $- BA$.

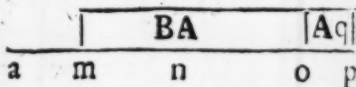
Si utraque species sit affirmata ut $Aq + XA = \bar{A}$ five
 $Aq + BA = Dc =$ toti rectangulo, quærat minor.

Esto $mp =$ majori,

& $A = op$ minori, cui

æquetur am , erit dif-
 ferentia $mo = B = X$

& $Q1.no = \frac{1}{2}Xq$, & $mpo = Dc$.



Erg. p. 6. 2. el. *r. n.* $\frac{1}{2}Xq + mpo$ (hoc est, $np =$
 $\frac{1}{2}Z$) $-\frac{1}{2}X$ (hoc est, no) est = op , five A minori;
 nempe, $np - no = op$ minori, quæ (in hoc casu
 qui sit tertius) sola æquationi satisfacit: nam intelli-
 gendo mp esse = A , non erit $Aq + BA = Dc$.

Atque

Atque ita omnes casus ex quinto tum etiam sexto secundi Elementorum demonstrantur, neque metuas quin & in altioribus æquationibus eadem tenebit demonstratio; nam in seriebus altissima species est ubique quadrata mediæ, (ut ex Ac in Ac fit Acc) ideoque & illius index hujus erit duplus; neque aliter fieri potest, quin ab indice (9) progressio omnis arithmetica necessario debeat esse dupla.

Vides jam ex antedictis quod præter constitutionem & reductionem æquationis, etiam resolutionem per regulas expositas & extractionem radices quandoque fieri debere; sed Exemplis omnia erunt clariora.

Exemp. 1. Invenire duos numeros quorum summa $B = 25$ datur, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur alius quivis datus numerus $CD = 84$.

Putæ præstitum esse, &c. & unus esto A ; ergo quoniam summa datur alter erit $B - A$; ex ductu unius A in alterum $B - A$ factus erit $BA - Aq$; & juxta tenorem quæstionis

1 2 0

erit $BA - Aq = CD$: æquatio hæc non patitur ulteriorem reductionem; & quoniam altissima species Aq est negata, B co-efficiens in media specie erit Z , summa magnitudinum quæsitaram, ex quibus fit CD rectangulum $= 84$, juxta formam illam in seriebus $ZA - Aq = \mathcal{E}$.

Erg. in hoc casu dualis radix exigitur juxta regulam primam:

nempe $\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{2} + r. n. \frac{Bq}{4} - CD. = A \text{ majori} = 21. \\ \frac{B}{2} - r. n. \frac{Bq}{4} - CD. = A \text{ minori} = 4. \end{array} \right.$

H 3

Tolle

Tolle $\frac{336}{4}$ è $\frac{621}{4}$ rest. $\frac{282}{4}$, hujus radix quadr. est $\frac{17}{2}$ = $8\frac{1}{2}$. Ad $8\frac{1}{2}$ adde $12\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ B, major erit 21; tum ex $12\frac{1}{2}$ tolle $8\frac{1}{2}$ rest $4\frac{89}{4}$ = $\frac{621}{4}$ & CD = 84 = $\frac{336}{4}$.

Jam redibis ad æquationem BA—Aq=DC; & vide quomodo utraque radix (tum 21, tum 4) æquationi satisfacit.

$$\text{BA} - \text{Aq} = \text{DC}$$

hoc est, $25 \times 21 - \text{quadr. ex } 21 = 84.$

Sic etiam,

$$\text{BA} - \text{Aq} = \text{DC}$$

$25 \times 4 - \text{quadr. ex } 4 = 84.$

Exemp. 2. Numerum invenire, qui cum dato numero B=156 suum quadratum, *sc.* Aq efficiet.

Puta factum esse, &c. & esto A; erg.

$$\text{A} + \text{B} = \text{Aq}; \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \& \text{ per antithesin } \text{Aq} - \text{A} = \text{B}.$$

Hic altissima species + Aq est affirmata; erg. co-efficiens erit differentia & æquationis resolutio facienda per regulam secundam; & quoniam media species —A est negata, pertinet per casum secundum ad affirmativam partem istius regulæ:

nempe, *r. u.* $\frac{1}{4} \text{Xq} + \text{B}. + \frac{1}{2} \text{X} = \text{A}$ majori.

Dices, Ego hic nullam video numerum co-efficientem in media specie, sed A per se sola stat. Respondeo, Si deficit co-efficiens, unitas erit co-efficiens ejusmodi æquationum.

$$1 = \text{X nam } \text{A} = 1\text{A} : \text{erg. } \frac{1}{4} \text{Xq} = \frac{1}{4} \& \frac{1}{2} \text{X} = \frac{1}{2}.$$

$$(156 + \frac{1}{4}) = \frac{621}{4} \text{ cujus radix } \frac{21}{2} = 12\frac{1}{2} \text{ cui adde } \frac{1}{2} \text{ fit } 13 = \text{A}. \quad 13 + 156 = 169 = \text{quadrato } 6 \text{ } 13.$$

Ex

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 103

Ex $12\frac{1}{2}$ tolle $\frac{1}{2}$ restat 12, minus latus rectanguli; nam ex 12 in 13 fit 156 rectangulum: sed 12 non satisfacit æquationi $Aq - A = B$; nam $144 - 12$ non est = 156.

Exemp. 3. Invenire numerum A, cujus Aq cum dato numero $B = 8$ efficiet numerum ad Aq in data ratione $R. S. = 6. 1.$

$$R. S. :: Aq + B. Aq.$$

erg. $SAq + SB = RAq$ per theor. cathol.

erg. $SB = RAq - SAq$ per antithesin.

erg. $B = \frac{RAq}{S} - Aq$ dividendo per S.

Hic co-efficiens, nempe $\frac{R}{S}$, erit summa quadratorum, quia altissima species $- Aq$ negatur:

erg. $\frac{1}{2} \frac{R}{S} = 3. + r. n. \frac{1}{4} \frac{Rq}{Sq} - B = 1.$ id est, $3 + 1 =$

$Aq \& A = 2.$ maj. & $3 - 1 = 2$ } $6. 1 :: (16 + 8) 4$
 $= Aq \& A = r 2.$ minori } $6. 1 :: (4 + 8) 2$

$r 2$ quadretur, & fit 2, cujus quadratus est 4 = Aq quadrato-quadratus radicis è 2; ex 4 addito ad rectangulum datum juxta conditionem problematis summa est 12 ad 2, ut 6 ad 1.

In hoc exemplo vides quod, præter resolutionem æquationis, & radix extrahenda, ut inveniat A.

Illam magnitudinem data appellatur co-efficiens, in quam ducitur magnitudo quæ sita vel aliquis ejus gradus: in hoc exemp. gradus magnitudinis, nempe Aq , ducitur in $\frac{R}{S}$

Ideoque, si æquatio aliqua, staret in hunc modum; $\frac{SB}{D}$

$$\frac{SB}{D} = \frac{mAq}{n} + \frac{GAq}{C} + \frac{RAq}{S} - Aq.$$

$\frac{SB}{D}$ effet rectangulum datum, co-efficiens effet compo-
 situs ex $\frac{m}{n} + \frac{G}{C} + \frac{R}{S}$ nam ex his in solam Aq fiunt
 tres species, quæ pro una nempe media reputantur in
 hac æquatione, quæ respondet ad $AqEq = Z \circ Aq - Aqq.$

Exemp. 4. Invenire numerum A, ad quem Aq mul-
 tatus numero dato quocunque, puta $B = 264$, rationem
 datam habeat R. $S = 10$. I. juxta conditionem quæsti-
 onis. $Aq - B.A :: R.S.$

ergo $RA = SAq - SB$ per cath. theor.

ergo $SAq - RA = SB$ per antith,

ergo $Aq - \frac{RA}{S} = B$ per parabol.

Co-efficiens $\frac{R}{S}$ est differentia, & quæritur major
 per primam partem posterioris regulæ:

$$r. n. \frac{1}{4} Xq + \frac{1}{2} X = A.$$

$$\text{hoc est, } r. n. \frac{1}{4} \frac{Rq}{Sq} + B. + \frac{1}{2} \frac{R}{S} = A.$$

$$\frac{1}{2} \frac{R}{S} = 5, \text{ hoc est, } r. n. 25 + 264 = 289 = (17 + 5)$$

$$= 22 = A.$$

Quadrètur 22, fit 484, è quo tolle 264, erit 220. $22 :: 10.1.$

$r. n. \frac{1}{4} \frac{Rq}{Sq}$, &c. respondet formæ Oughtredi, $r. n. \frac{1}{4} Xq$, &c.

Forma

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 105

Forma autem nostra sic legenda; radix universalis, quadrantis quadrati co-efficientis five quaſitarum magnitudinum differentia $= \frac{R}{S}$, plus rectangulo $= B$; radix (inquam) hæc universalis aucta ſemiſſe co-efficientis, æquatur magnitudinum majori.

Exemp. 5. Duos numeros in dato exceſſu $B = 6$ invenire, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur numerus datus quicunque $C = 475$.

Putā, &c. Et eſto minor A , quoniam datur exceſſus $= B$; ergo major erit $A + B$, & juxta tenorem quaſtionis conſtituetur æquatio

$$Aq + BA = C.$$

Quoniam hic media ſpecies BA eſt affirmata, pertinet ad caſum tertium, & reſolutio fiet per poſtერიorem partem regulæ ſecundæ, in qua co-efficientis ſemiſſis negatur de radice univerſ. *r. n.* $\frac{1}{4}Bq + C. - \frac{1}{2}B = A$ minori.

Ex *r. n.* $(9 + 475) = 22$ tolle 3, erit $A = 19$ min.

$$22 + 3 = 25 \text{ maj.}$$

In hoc exemplo utraque radix requiritur ad ſatisfaciendum quaſtioni, ſed proſecto major non ſatisfacit æquationi $Aq + BA = C$:

nam $Q. 25 + 25$ in 6 non eſt $= 475$.

ſed $Q. 19 + 19$ in 6 eſt $= 475$.

Exemp. 6. Uberioris explicationis cauſa dabimus, omnium caſuum alia eaque naturalia exempla, quæ & prodeſſe & delectare poſſint; tentabis autem (ſi placeat) per teipſum; noſtris non examinatis.

Data

106 Oughtredus explicatus, five,

Data media ($B=12$) trium proportionalium linearum rectarum & differentia inter extremas $= 10$, invenire minorem extremam.

Minor esto A , major erit $A + X$, ducatur in A , & per cath. theor. erit $Aq + AX = Bq$
per posteriorem partem 2^{da} reg. $A=8$. 8. 12. 18. ::

Exemp. 7. Invenire majorem; esto A ; minor erit $A - X$, erg. $Aq - XA = Bq$
per priorem partem reg. 2^{da} $A=18$. 18. 12. 8. ::::

Exemp. 8. Data media trium proportionalium $B=12$, & summa extremarum $= Z=26$, invenire alterutram extremam.

Major esto A , minor erit $Z - A$, erg. $ZA - Aq = Bq$
per affirmativam partem prioris reg. $A = 18$ majori.

Esto A minor, maj. erit $Z - A$, erg. iterum $ZA - Aq = Bq$
per negativam partem prioris reg. $A = 8$ minori.

Curiosus Lector, & qui voluptatem capit in Problematis resolvendis, plura hujus generis in *Clavii Algebra* reperiat, etiam & in *Authoris* cap. 19, multa exempla geometrica ad has duas regulas spectantia habuerit, quæ quidem, his intellectis, explicatione non indigent; ideoque & ex monito *Authoris* ad calcem Problematis 14 capitis istius, ulteriorem explicationem omisimus, præterquam eorum quæ habentur circa Progressionem Arithmeticam ad Problema sextum ibidem.)

Certe in hoc capite Sagacissimus *Oughtredus* abditissima reclusit mysteria, & quod mirabile dictu ex primis

mis atque facillimis illis æquationibus, in cap. II. ingentem extraxit thesaurum; nimirum post alia quorum inavis admodum est contemplatio atque scientia utilissima, æquationum tum genesin tum analyfin exposuit non modo sed & una demonstravit; pergit Author binomiorum & triangulorum praxin ex iisdem fecundis juxta atque facillimis principiis instituere, pulcherrima sane methodo, adeo ut pro singulis centum immolasse boves sit justo longe minus.

Et quod ad genesin & analyfin sex illorum binomiorum quæ ab *Euclide*, 10. el. celebrantur, ostendit, primo, quomodo quadrentur; dein, quomodo radices quadratæ extrahantur.

Intellectis iis quæ jam exposuimus, præsertim in cap. 15. una cum aliquali scientia in decimo elementorum horum binomiorum tum genesin tum analyfin percipere non erit difficile; qui autem priora non capiunt, vereor ne oleum & operam perdant.

10. Pro genesi binomiorum ex lateribus suis surdis regula est $Z\gamma + 2\text{Æ} = Z\eta$.

Pro residuorum regula esto $Z\gamma - 2\text{Æ} = X\epsilon$.

$Z\gamma + 2\text{Æ} = Z\eta$ nempe, quia per cap. 11. $Z\eta = (A\eta + E\eta) + 2\text{Æ}$, ex hac æquatione quæ quartam secundæ elem. exponit, facile est cujuslibet binomii etiam rationalis quadratum in duobus nominibus exhibere; ut quadratus ex $(6 + 4) = 10$ constat ex Qu. 6 = 36 & Qu. 4 = 16 constat (inquam) ex quadratis 36 & 16 additis = 52, pro nomine majore, cui, pro nomine minore, adde per signum + rectang. duplum ex $4 + 6 = 48$ = 2Æ, habebis quadratum in duobus nominibus $(52 + 48) = 100$.

It.

108 Oughtredus explicatus, five,

In exemplo primo duo nomina sunt, 4 & $r\ 11$; quadretur 4, & fit 16; quadretur $r\ 11$, abjiciendo signum radicale, & fit 11: ex 16 & 11 additis erit 27. = $Z\circ$. pro nomine majore; tum, pro minore, per 10 & 11. cap. 15. ex $r\ 16 = 4$ in $r\ 11$, fit rectangulum $r\ 176$, cujus duplum est $r\ 704 = 2\ \mathcal{A}e$, sc. multiplicando $r\ 176$ per $r\ 4 = 2$, attollendo 2 ad $r\ 4$:

$$\text{ergo } Z\circ + 2\mathcal{A}e = Zq,$$

$$\text{hoc est, } 27 + r\ 704 = Qu. 4 + r\ 11.$$

In secundo exemplo observabis quod fit nominum reductio, nempe, per 7 15 hujus reducuntur $r\ 12$ & $r\ 27$ ad eundem denominatorem, sc. ad $r\ 48$ & $r\ 27$, & comparando per crucem, ut in cap. 10. hujus, reducuntur ad minimos terminos, — ita, $r\ qq\ 12 + r\ qq\ 27$ comparando per crucem.

$$\begin{array}{r} \text{M.C.M.} 4 \left) \begin{array}{r} 3 \\ 12 \\ 27 \\ 1 \end{array} \right. \begin{array}{r} 27 \\ 4 \\ 1 \end{array} \quad r. \text{ habes } r\ qq\ 3 + r\ qq\ 27. \end{array}$$

11. Ex genesi æquationum, in cap. 11. sicut positis in principio, $A + E = Z$, inde fit $Aq + 2\mathcal{A}E + Eq = Zq$; ita, si in principio posuisses $Aq + Eq = Z\circ$, inde fuisset $Z\circ q = Aqq + 2\mathcal{A}qEq + Eqq$, atque ex eodem rationis ductu, $\frac{Z\circ}{2} + \frac{X\circ}{2} = Aq$ & $\frac{1}{4} Z\circ q = \mathcal{A}Eq = \frac{1}{4} X\circ q$.

Unde pro analysi binomii regula esto, $\frac{1}{2} Z\circ + r. \frac{1}{4} Z\circ q - \mathcal{A}Eq : (\frac{1}{2} X\circ) = \frac{Aq}{Eq}$

In exemplo primo $\mathcal{A}E$ est $r\ 704$, quia $r\ 704$ est minus nomen = $2\mathcal{A}E$; si ergo divides per 2 = $r\ 4$, erit $\mathcal{A}E = r\ 704$.

In hoc exemplo $\frac{27}{2} + \frac{1}{2}$ sunt = $\frac{32}{2} = 16$, cujus latus est 4.

12. At-

12. Atque hic obiter trianguli rectanguli plani genesis se offert, quia $Zq = Xq + 4\mathcal{A}E$; nam per c. 11. $Zq - Xq = 4\mathcal{A}E$, ideoque per antithesin $Zq = Xq + 4\mathcal{A}E$; nempe $Hq = Bq + Cq$, per 47. 1. el. per H intelligit hypotenusam, per B basin, per C cathetum sive perpendiculararem.

Quod si velis ex binis lineis sive numeris $A = 2$ & $E = 1$ triangulum rectangulum constituere, quoniam per 47 el. 1. unum quadratum, nempe hypotenusæ sive lineæ subtendentis, angulum rectum, æquatur duobus quadratis, sc. crurum basis & catheti; & per 11. hujus, unum quadratum, nempe $Zq = Aq + 2\mathcal{A}E + Eq$, æquatur duobus, scil. $Xq = Aq - 2\mathcal{A}E + Eq$, una cum $4\mathcal{A}E$; dico unum quadratum $Zq =$ duobus $Xq + 4\mathcal{A}E$, ideo supponas $4\mathcal{A}E$ esse duorum quadratorum alterum, latera igitur erunt $A + E$ (latus ex $Aq + 2\mathcal{A}E + Eq$,) $A - E$ (latus ex $Aq - 2\mathcal{A}E + Eq$,) & $4\mathcal{A}E$; laterum (inquam) trianguli erit primum pro hypotenusâ trianguli, $A + E = 2 + 1 = 3$; secundum, pro basi, $A - E = 2 - 1 = 1$; & tertium, pro catheto, erit $4\mathcal{A}E = 4 \times 2 \times 1 = 8$.

Jam quoniam radix $4\mathcal{A}E$ est furda, ideoque exprimi nequit ut surditas illa (si ita loquar) evitetur; A & E , species in principio positæ, mutabuntur in Aq & Eq ; atque ita ut in sectione 11 hujus capituli ostendimus $Zq = Xq + 4\mathcal{A}qEq$, jam radix $4\mathcal{A}qEq$ potest exprimi, est nempe $2\mathcal{A}E$: latera ergo erunt, pro hypotenusâ, $Z = Aq + Eq = 4 + 1 = 5$; secundum, pro basi, erit $X = Aq - Eq = 4 - 1 = 3$; & tertium, pro catheto, erit $4\mathcal{A}qEq = 2\mathcal{A}E = 2 \times 2 \times 1 = 4$: latera ergo sunt, ut habet Author, 5. 3. 4.

13. Datis

110 Oughtredus explicatus, sive,

13. Datis binis triangulis rectangulis $H. B. C.$ & $h. b. c.$ tertium ex ipsis fabricare, idque dupliciter,

I. quia $Bq = Hq - Cq$
 & $bq = hq - cq$ } multiplicentur invicem.

Eritque, &c.

Literæ majores, HBC , ponuntur pro lateribus majoris trianguli; & literæ minores, hbc , pro lateribus minoris.

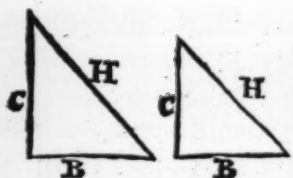
Multiplicentur invicem; nam si æqualia æqualibus multiplices facta erunt æqualia; ergo ex Bq in bq fit unum quadratum, $Bqbq$, cujus radix Bb ; ex $Hq - Cq$ in $hq - cq$, fit $(Hq hq - Hq cq - Cq hq + Cq cq) = Hq hq + Cq cq$ minus $Hq cq + Cq hq$ duobus quadratis; dico unum quadratum $Bqbq = Hq hq + Cq cq$ min. $Hq cq + Cq hq$ duobus quadr. ideoque æquatio ad triangulum applicetur per 47. I. el.

Dices, Unde sciam ultimam partem æquationis constare ex duobus quadratis? Respondeo, Docet Author in proximis. Nam $Q. Hh + Cc$, hoc est, quadrando $Hh + Cc$, habebis $Hq hq + Cq cq + 2HC hc$; & similiter quadrando $Hc + Ch$, habebis $Hq cq + Cq hq + 2HC hc$; tum subtrahendo unum quadratum ex altero per signa contraria, videbis quod $- 2HC hc$ expunget $+ 2HC hc$; & erit,

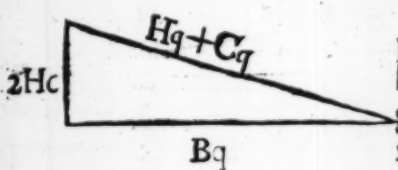
Unum quadr. $Bqbq = Hqh q + Ccq min. Hqcq + Cq hq =$ duobus quadratis. Sive quod idem est,

$Bqbq = Q. Hh + Cc min. Q. Hc + Ch$; & erunt latera extrahendo radices

$Bb. Hh + Cc. Hc + Ch$; quæ sit regula prima.



Quæ sequuntur de angulis simplicis, duplis, &c. una cum primis sectionibus cap. 17. pertinent ad magna mysteria angularium sectionum, quarum gratia consulere potes *Vietam & Andersonum* ibidem. Omnes literæ in regulis supponuntur esse majores pro prima operatione qua triang. sunt æqualia; ac si regul. I. esset BB. HH+CC. HC+CH. Et difficultas omnis mox evanesceret si velles ad regulas attendere: nam dicit regula inprimis BB, id est, basis unius ducatur in basin alterius pro nova base; erg. ex B in B fit Bq.

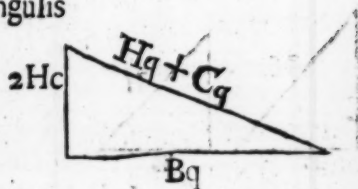
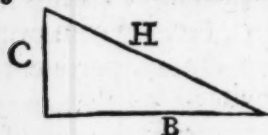


Tum dicit regula ad proximum punctum pro hypothenusa novi trianguli HH+CC, hoc est, sume rectangulum sub hypothenusis, plus rectangulo sub cathetis, hoc est, Hq+Cq.

Ultimo dicit regula pro catheto novi trianguli HC+CH, id est, sume rectangulum sub hypothenusa primi & catheto secundi auctum rectangulo sub catheto primi & hypothenusa secundi; id est, duplum rectangulum sub hypothenusa & catheto, id est, HC+HC=2HC; atque ita angulus basi oppositus, in novo triangulo, erit duplus anguli respondentis in simplice triangulo.

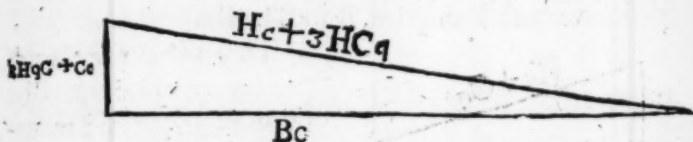
Jam

Jam ex his duabus triangulis



fabricabis tertium pro triplo angulo ad basin opposito multiplicando latera hæc inventa per H. B. C. juxta regulam Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.

stent ita, $Bq. Hq+Cq. 2HC.$
 $B. H. C.$



Litera c minor hic cubum significat.

$Cc = C$ cubo.

Pro base duc B in Bq, fit Bc pro hypoth. ut regula Hh+Cc præcipit : duc H in Hq+Cq & C in 2HC, habebis Hc + 3HCq; tum pro catheto, ut vult regula Hc+Ch, duc Hq+Cq in C & 2HC in H, habebis 3HqC+Cc.

Reliqua ex his facillime intelliguntur.

Quando duplus angulus rectum excedit, quid tum sit vide Autores prædictos, ut & pro primis sectionibus, in proximo capite, in quibus applicat Author ea quæ hic demonstrantur ad species posterioris tabulæ.

Monitum Interpretis.

Curiosus Lector uberioris satisfactionis causa consulas

lat *Vietæ* Logist. prop. 45. &c. de Genesi triangulorum, ut & alias ejusdem viri longe celeberrimi partes, propter alias causas, si nostra mediocritas ei minus satisfecerit; nam Author noster oculum in *Vietam* adeo intendisse videtur, ut nonnunquam in obscuritatis nimie crimen & usque ad erroris alicujus speciem etiam incurrisse videatur, ut diximus in cap. 15. sect. 14. ubi credibile est *Oughtred.* per expurgationem idem intellexisse quod *Vietæ* in lib. de Emend. Aequat. id est, liberationem potestatis ab adfectionibus, viz. sub gradu ejusdem & alia magnitudine data, per mutuas expunctiones in summa, ut inter operandum juxta regulas multiplicationis expositas facile appareat; sic pag. 80. lin. 12. hujus: —Bq liberatur à BA. BE.

Sed verba simpliciter prolata sine ullo alio apparatu alterius generis expunctionem requirere videantur, ut ibidem diximus, nec dictorum poenitet.

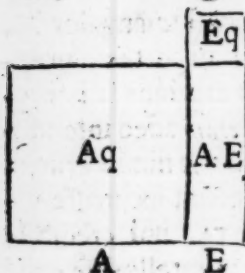
CAP. XVII.

*Alia tabula posterioris in cap. 12. inspectio,
quoad Aequationes.*

5. OMnes cujusque ordinis intermediæ species sunt etiam potestates mediorum inter A & E proportionalium, ut in ordine quadratico $Aq + 2AE + Eq$, est AE medium proportionale inter Aq & Eq, hoc est, ut $Aq. \bar{A} :: \bar{A}. Eq$; nam operando speciosè per auream regulam, $Aq. AE :: AE. \frac{AqEq}{Aq}$, hoc est, Eq.

I

Aq



$$Aq.AE :: A.E :: E.Eq. \text{ per 1.6.el.}$$

Et si potestates sint proportionales, etiam & latera erunt per 22. 6. Si erg. $Aq.AE :: E.Eq.$ etiam ut $A.AE :: E.E.E$. Si Ac. $3AqE.3AEq.Ec \div \div \div$ etiam & $A.A.AqE.A.A.Eq.E \div \div \div$ sunt continue proportionales; nempe $A.M.N.E.$ nam AqE & AEq reputantur pro solidis ex tribus dimensionibus constantibus, licet non habeant radices rationales sed surdas, puta M & N . ac si AqE constaret ex A in M in N . est autem $AMN = Mc$. nam si fit $A.M :: M.N$. erg. $Mq = AN$. duc utramque partem in M . erit $Mc = AMN$.

Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E : ut si velis quinque medios terminos proportionales, potestates indicem habebunt [6] sive Cc . unitate majorem quam numerus quaesitorum mediorum: eruntque (præfigendo signum radicale cubo-cubicum ($\sqrt[6]{}$) omnibus intermediis speciebus in illo ordine juxta tabulam posteriorem.)

$$A.\sqrt[6]{AqE}.\sqrt[6]{AqEq}.\sqrt[6]{AcEc}.\sqrt[6]{AqEqq}.\sqrt[6]{AEqE}.\div \div \div$$

6. Facile est radicis binomialis datae $A + \sqrt[6]{AE}$, potestatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter potestates nominum extremas) construere: certe facile est, sed non nisi memineris quomodo radices surdae multiplicari

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 115

plicari debent; nempe ex A in $r \mathcal{A} \mathcal{E}$ fit $r \mathcal{A} q \mathcal{A}$, attollendo A ad $r \mathcal{A} q = A$, ut ad cap. 15. docuimus; & ex $r \mathcal{A}$ in $r \mathcal{A} \mathcal{E}$ fit \mathcal{E} ; abjiciendo signum radicale ex $r \mathcal{A}$ in \mathcal{E} fit $r \mathcal{A} \mathcal{E} c$; attollendo \mathcal{E} ad $r \mathcal{A} q = \mathcal{E}$.

Ac

Ita, A Aq
r Æ 2 r Aq Æ 3 r Aqq Æ &c. ad modum tabul. post.
 Æ 3 r Aq Æ q
 r Æ c.

II. Mirum est quod uncia five numeri speciebus præfixi, in tabula posteriore, sunt figuræ numerariæ: surgunt ergo ab unitate continue in geometrica proportionē, quandoquidem uncia potestatis diagonalis est unitas.

| | | | | | |
|-------|------|-------|-----|-------------|--------------|
| 0 1 A | 1 Aq | 1 Ac | | | |
| 1 + | 2 Ae | 3 AqE | &c. | rad. | quadr. |
| 0 1 | 1 Eq | 3 AEq | | 2 | 4 |
| | | 1 Ec | | | 8 |
| | | | | planum | five |
| | | | | triangulare | solidum five |
| | | | | | pyramidale |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|

CAP. XVIII.

2. **Q.** $1 = 9$ $Q. \frac{1}{3}$, hoc est, $Q. 1 = 9$ in $Q. \frac{1}{3}$; nam
 Quadrat. $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{9}$; sed ex 9 in $\frac{1}{9}$ fit $\frac{9}{9} = 1$.

Ita $Q. 1 = \frac{1}{9} Q. 3$; nam $Q. 3$ est 9, sed 9 in $\frac{1}{9}$ fit $\frac{9}{9} = 1$; atque ita reliqua resolvuntur, per cap. 10. hujus.

4. Datis igitur summa trium $\div \div$ ($Aq + \mathcal{A} + Eq$)
 cum alterutro extremorum dantur duo reliqui termini,
 nam $Qu. \frac{1}{2} A + E$ est $= \frac{1}{2} Aq + \mathcal{A} + Eq = Aq + \mathcal{A} + Eq - \frac{1}{2} Aq$

quia $\frac{1}{2} Aq = Aq - \frac{1}{2} Aq$
 erg. r. n. ($Aq + \mathcal{A} + Eq - \frac{1}{2} Aq$) $= \frac{1}{2} A + E$ minus $\frac{1}{2} A = E$.
 & r. n. ($Aq + \mathcal{A} + Eq - \frac{3}{4} Eq$) $= \frac{1}{4} E + A$ minus $\frac{1}{4} E = A$.

CAP. XIX.

PROBL. VI. hic locus quosdam satis exercuit, ideo
 que pauca annotare placet. Prima & secunda
 propos. per rationem constituuntur, reliquæ ex iis, &
 unæ ex aliis deinceps sequuntur.

Hæc æquatio ($TX - X = \omega - \alpha$, summa differentia-
 rum) per rationem omnibus in loco manifestam con-
 stituitur; divide utramque partem per $T - 1$, oritur

$$2. \text{ prop. } \frac{\omega - \alpha}{T - 1} = X.$$

Prima propositio, $T\omega + T\alpha = 2Z$, etiam per ratio-
 nem constituitur, non omnibus adeo obviam.

Sint

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 117

| | | | | |
|-----------|----------|-------|-----------|---|
| | $c = 0$ | adde | $10 = 10$ | Sint 0.2.4.6.&c. arithm. proporti. T numerus terminorum = 11. Hinc manifestum est quod si 11, numerus terminorum, ducatur in medium terminum 10, fiet summa omnium term. = 110; quod si idem 11 ducatur in duplum termini medii, viz. in 20, fiet numerus ad summam |
| Med. ter. | 2 | adde | $8 = 10$ | |
| | 4 | adde | $6 = 10$ | |
| | 6 | adde | $4 = 10$ | |
| | 8 | adde | $2 = 10$ | |
| | 10 | = | 10 | |
| | 12 | toile | $2 = 10$ | |
| | 14 | toile | $4 = 10$ | |
| | 16 | toile | $6 = 10$ | |
| | 18 | toile | $8 = 10$ | |
| | $c = 20$ | toile | $10 = 10$ | |

terminorum duplus, viz. 220: noverit autem unusquisque quod in arithm. progressionem extremi additi faciant duplum medii $20 + c = 10 + 10$; uti in geomet. progres. per cathol. theor. factus à medio æquatur facto ab extremis.

Hinc liquet, quod si addatur primus terminus a ad w , ita, $a + w$, & summa ducatur in numerum terminorum T, per rationem constituetur æquatio $Ta + Tw = 2Z$.

Problem. VI. Problematum circa, &c.

IV.

$\frac{wq - aq}{X} + w + a = 2Z$ per 1. 3. nempe prima pars tertia æquationis substituenda est loco T. in prima prima, &c.

VIII.

$(TX - X + 2a)$ in $T = 2Z$ per 1. 7. prima pars septima

118 Oughtredus explicatus, *sive*,
 septimæ æquationis substituenda est loco ω in prima
 primæ.

X.

$$\frac{2Z-2Ta}{Tq-T} = X. \text{ per 8. per antithesin \& parabol.}$$

XI.

$$r. n. \frac{1}{4}Xq + 2ZX + aq - Xa : \text{minus } \frac{1}{2}X = \omega, \text{ per 4. inde}$$

$$\text{fit } \overset{2}{\omega}q + \overset{1}{X}\omega = \overset{0}{2ZX} + \overset{1}{aq} - \overset{0}{Xa}$$

erg. per 9. cap. 16. $r. n. \frac{1}{4}Xq + 2ZX$, &c.

XII.

Si $B = 2a - X$ erit

$$r. n. \frac{Bq}{4Xq} + \frac{2Z}{X} \text{ minus } \frac{B}{2X} = T. \text{ per 8. inde}$$

$$\text{fit } TqX - TX + 2Ta = 2Z. \text{ divide utramq; part. per } X$$

$$\text{erit } Tq + \frac{\overset{1}{T}2a - \overset{0}{Tx}}{\overset{2}{X}} = \frac{\overset{0}{2Z}}{\overset{0}{X}} \text{ co-efficiens est } \frac{2a-X}{X}$$

quæritur T minor per posteriorem partem regulæ se-
 cundæ in cap. 16. & casum tertium.

XVII.

$$r. n. \frac{1}{4}Xq + \omega q + X\omega - 2ZX \text{ plus } \frac{1}{2}X = a, \text{ per 4. inde}$$

$$\text{fit } \overset{2}{aq} - \overset{1}{Xa} = \overset{0}{\omega}q + \overset{1}{X}\omega - \overset{0}{2ZX}$$

erg. per 16. cap. $r. n. \frac{1}{4}Xq$, &c. quæritur a major
 & $(\omega q + X\omega - 2ZX)$ est rectangulum.

XVIII.

XVIII.

$$\frac{2\omega+X}{2X} \text{ minus } r. n. \frac{4\omega q+4X\omega+Xq-2Z4X}{4Xq} = T, \text{ per 14.}$$

inde fit $\frac{2T\omega+TX}{X} - Tq = \frac{2Z}{X}$: pertinet ad posteriorem partem primæ regulæ; co-efficiens est $\frac{2\omega+X}{X}$,
cujus quadratum est $\frac{4\omega q+4\omega X+Xq}{Xq}$

XIX.

$$\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = a : \text{ per 10. inde fit}$$

$$\frac{2Z - Tqx + Tx}{2T} = a. \text{ hinc dividendo juxta caput 10.}$$

$$\text{fit } \frac{2Z}{2T} - \frac{Tx}{2} + \frac{X}{2} = a.$$

XX.

$\frac{2Z}{T}$, &c. male pingitur $\frac{2Z}{T}$ pro $\frac{2Z}{2T}$, &c. nam per propositionem 16 & isomeriam fit $Tqx - Tx = 2T\omega - 2Z$
tum per antith. & dividendo fit $\frac{Tqx - Tx + 2Z}{2T} = a.$

CAP. XX.

*De Equationum adfectarum Resolutione
in Numeris.*

Quomodo æquationes adfectæ, quæ æqualiter in tribus speciebus ascendunt, ope duarum regularum resolvantur, jam supra, cap. 16. ostendimus; atque ad resolutionem in numeris arithmetice, æquationum, etiam inæqualiter (quoad indices suos,

4 1 0

ut $Lq + Dcl = Fqq$) scandentium, viam ibidem præparavimus; de iisdem hoc loco fusius tractaturi ut nemo non Authorem nostrum intelligat, modo mediocri usus diligentia, in legendo (ut sic dicam) æqualiter scandat: id autem primo loco monendum, quod *Cardanus* regulam tradidit, qua resolvantur æquationes cubicæ in tribus speciebus etiam inæqualiter as-

3 1 0

cendentibus, ut $Lc + Cql = Dc$, sive $Ac + BA = D$, per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoscitur. Regula est,

$$rC. + \frac{1}{2}D + r\frac{1}{4}DD + \frac{1}{2}Bc - rC. - \frac{1}{2}D + r\frac{1}{4}DD + \frac{1}{2}Bc = \text{radici}$$

Verum pro harum cubicarum æquationum resolutione, curiosus Lector consuiat *D. Florim. de Beaune* in *D. Cartes.* Geom. & Præstantissimi Mathematici *Fr. à Schooten*, Tractatum de Cubicarum æquationum resolutione eruditissimum: tum etiam *Vietam*, Mathematicum monstrofi ingenii, horum omnium & (ne quid dissimulem) etiam Authoris nostri, utut subtilissimi Magistrum,

gistrum, De emendatione æquationum, &c. quo pacto æquationes ad faciliores alias atque alias formas reducuntur atque reformatur.

Præsertim autem legat Magistrum De numerosa potestatum resolutione, cui respondet hic Tractatus Authoris, qui *Vietam* in nitidissimam formam concinnavit; verum enimvero, dum brevior esse laboravit, factus est longe obscurior, adeoque ut vix putem Lectorum vicissimum, Authorem nostrum sine adjutore, intellecturum, nisi forte multoties legendo & relegendo, quod quotusquisque mortalium tam ferrei sit pectoris ut sustinuerit: conabor illa (atque illo ordine) proferre quibus uterque Author, tum *Oughtredus* tum ipse *Vieta*, facilius intelligantur: in hunc finem lege iterum, si placeat, ea prius quæ annotavimus in sect. 4. cap. 13.

Tum consulenda Tabula æquationum adfectarum, quam affabre fabricavit Author ex posteriori tabula, ut quivis ex utriusque collatione facile potest percipere; illa, distinctionis causa, tabula gnomonica appelletur.

$$\left. \begin{array}{l} Lq = | Aq. | 2AE. Eq \\ Bl = | BA. | BE. \end{array} \right\} = Cq$$

Esto hic primus ordo quadraticarum adfectarum æquationum, & L esto radix binomia = A + E, cujus A est latus singulare primum, E est latus singulare secundum: ex hoc autem ordine unum solummodo æquationum genus, quod ad species ipsas attinet, exsurgit, nempe, $Aq + 2AE + Eq + BA + BE = Cq$: sive, $Lq + Bl = Cq$: in hac æquatione L est radix investiganda, B numerus co-efficiens datus, Cq est numerus datus, qui venit sub nomine potestatis resolvendæ juxta artis

artis leges & methodum, ita ut radix $L = A + E$ inveniat: puta æquationem, cujus in sect. 4. 13. cap. genesis proponitur, $Lq + Bl = Cq$, sive $Lq + 3l = 3420$. 3420 est potestas adfecta resolvenda, ita ut inveniat $L = 57$; sic autem ad hujus æquationis resolutionem te accinges problematicè proponendo, E dato in numeris (Lq) quadrato adfecto adjunctione plani sub latere (L) & data co-efficiente longitudine (3) viz. $Lq + 3L = 3420$, latus analyticè educere. Ad lateris educationem sciendum quod hæ duæ species, Aq BA , in media columna, sunt diagonales pro latere primo $= A$, tres reliquæ ($2E$. Eq . BE .) complent gnomonem pro lateribus sequentibus singularibus.

Quo melius purarum potestatum resolutionem, juxta caput 14. intellexeris, eo minus in adfectarum analysi laborabis, siquidem valde simili modo proceditur; sunt tamen non leves differentię, quarum tres hoc loco notabimus.

1. Ibi punctabas potestatem resolvendam uno tantum modo, nempe pro suo genere, punctis binis, pro quadrato, (ternis, pro cubo, &c.) ut desuper, ita, 3420. Hic autem potestatem etiam punctabis infra, pro co-efficientium genere, *scil.* punctis lateralibus, si co-efficiens ducatur in longitudinem; (quadraticis, si in planum; cubicis, si in solidum, &c.) ut in præsentī exemplo, ita, 3420

Et in punctando hæc esto regula perpetua, viz. quot fuerint puncta superiora tot sint & inferiora; & sub ultimo puncto versus sinistram stabit co-efficiens,

ut . . puncta quadratica.
 3420 .. puncta duo etiam lateralialia.
 3 co-efficiens in proprio loco.

2. Ibi tollis è potestate resolvenda, lateris primi so-
 lam diagonalem potestatem, ut (in quadraticis) Aq:
 hic autem & altera species diagonalis BA tollenda (vel
 omnes species diagonales tollendæ si plures sint,) ita,

| | | | |
|---------------------|------|------|-------------------------------|
| radix 57) | 3420 | .. | punct. quadr. |
| | | .. | puncta lateralialia. |
| radix quad. primi | 3 | | co-efficiens in proprio loco. |
| puncti $34 = 5 = A$ | | | |
| | 25 | Aq } | species diagon. |
| | 15 | BA } | |
| | 265 | | summa ablatitia è potest. |
| | | | resolvend. |
| | 770 | | residuum potest. resolvend. |

3. Ibi legitime constabas divisorem ex latere A in-
 vento : hic etiam co-efficiens in numerum divisorum ad-
 scribatur, co-efficiens autem in singulis operationibus
 movebitur uno puncto propius versus dextram, ita,

pro

pro E.

divide 770 per
103, & perice
gnomonem, ut
tabula requirit

770

3

10

residuum potest. resolv.

co-efficiens motus

2A

} divisores.

103

summa divisorum.

E = 7 radicis
lateri secundo

70

49

21

2AE

Eq

BE

} gnomon.

770

summa tollenda è residuo potestatis
resolvendæ, & restat 0.

$$\begin{aligned} Lc &= \{ Ac \cdot 3AqE. 3AEq. Ec \} \\ Blq &= \{ BAq. B2AE. BEq \} \\ Cql &= \{ CqA. CqE \} \end{aligned} \quad \Bigg\} = Dc. \text{ num. resol-} \\ & \quad \text{vendo dato.}$$

Esto hic ordo secundus & cubicarum æquationum,
quarum tria genera; nam $Lc + Blq = Dc.$
vel $Lc + Cql = Dc.$
vel $Lc + Blq + Cql = Dc.$

Exempli causa, proponatur problematicè cubus ad-
fectus resolvendus, ita, ex dato in numeris cubo (Dc)
adfecto adjunctione duorum solidorum, uno ex co-effici-
ente longitudine (B=2) ducta in quadratum lateris
(Lq) altero ex co-efficiente plano (Cq=3) ducto
in latus (L) latus analyticè educere:

Esto

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 125

Est $Lc + 2Lq + 3L = 191862$.

Potestas resol-
venda

A laus primum
invenitur extrahend.
rad. cub. ex primo
puncto = 191.

• • duo puncta cubica.
191862 (57 radix.

• • duo puncta lateralialia, pro Cq, quia
ducitur in latus.

• • duo puncta quadratica, pro B, quia
ducitur in lateris quadratum.

2 = B } co-efficientes in suis locis.
3 = Cq }

| | | |
|-----|-----|-----------------------|
| 125 | Ac | } species diagonales. |
| 50 | BAq | |
| 15 | CqA | |

13015 summa ablatitia è potest. resolv.

61712 residuum potest. resolv.

| | | |
|----|------------------|---|
| 75 | 3Aq | } divisores legitimè conflat juxta tabulam, ex latere A=5 invento, & co-ef- ficientibus datis. |
| 15 | 3A | |
| 20 | B ₂ A | |
| 2 | B | |
| 3 | Cq | |

7855 summa divisorum per quam divida-
tur resid. pot. resolvenda = 61712
oritur 7 = E, qui scribatur in quo-
to pro latere secundo.

| | | |
|-----|-------------------|---|
| 525 | 3AqE | } gnomon auferend. è resid. pot. resolv. unde restat nihil, & operatio perfici- tur invento L = 57. |
| 735 | 3AEq | |
| 343 | Ec | |
| 140 | B ₂ AE | |
| 98 | BEq | |
| 21 | CqE | |

61712 summa = resid. potest. resolv.

Lqq

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Lqq} = & \left\{ \begin{array}{l} \text{Aqq.} \\ \text{Blc} = \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 4\text{AcE.}6\text{AqEq.}4\text{AEc.Eqq} \\ \text{B}_3\text{AqE.} \text{B}_3\text{AEq.} \text{BEc} \\ \text{Cqlq} = \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \text{Cq}_2\text{AE.} \text{CqEq} \\ \text{Dcl} = \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \text{DcA.} \\ \text{DcE.} \end{array} \right. & \left. \right\} \text{Fqq}
 \end{array}$$

Tertius hic ordo est æquationum quadrato-quadraticarum, quarum septem sunt genera; & quoniam species omnes (omissis unciis) in hoc, ut & in aliis ordinibus, æquales habere debent dimensiones, ut antea fuisse est expositum in c. 16. ideo co-efficientes numeri (qui hic & ubique consonantibus exprimuntur) attolluntur ad gradum, qui in hunc finem requiritur.

Non enim dico, $\text{Lqq} + \text{Bqlc} + \text{Clq} + \text{Dl} = \text{F}$.

Sed ita, $\text{Lqq} + \text{Blc} + \text{Cqlq} + \text{Dcl} = \text{Fqq}$.

Ideoque & videbis omnes species in tabula his respondententes constare ex quatuor dimens. tum diagonales Aqq , BAC , &c. tum gnomonicas 4AcE , 6AqEq , &c.

Quamvis igitur inter operandum forte pervenires ad talem æquationem, $\text{Lqq} + \text{Bqlc} + \text{Clq} + \text{Dl} = \text{F}$; debes tamen concipere Bq (in Bqlc) esse tantum longitudinem, & D (in Dl) esse solidum, & F , numerum è regione datum, esse quadrato-quadratum.

Quod si inter operandum forte pervenires (comparando magnitudines tum quæsitæ tum datas) ad talem æquationem, $\text{Aqq} + \text{BAC} + \text{CAq} + \text{DA} = \text{F}$; dico hanc æquationem esse quadrato-quadraticam, & huic respondere $\text{Lqq} + \text{Blc} + \text{Cqlq} + \text{Dcl} = \text{Fqq}$; ideoque & concipere debes ipsam speciem A (ipsam, inquam, A) constare ex duobus nominibus, nempe $\text{A} + \text{E}$, quamobrem confusionis vel obscuritatis vitandæ causâ, radicem investigandam in hoc capite per (L) exprimi curavimus.

Denique

Denique si æquatio nullas haberet co-efficientes, ut,

$$Lqq + Lc + Lq + L = Fqq;$$

debet in hoc casu, unitas ubique subintelligi loco co-efficientis, ac si scriptum esset, $Lqq + 1Lc + 1Lq + 1L = Fqq$.

& 1 in (Lc) esset longit. = B, 1 in (Lq) planum = Cq.

1 in (L) solidum = Dc, ideoque responderet huic formæ, $Lqq + Blc + Cqlq + Dcl = Fqq$:

Sub hoc ordine, exempli causa, proponatur resolvenda potestas quadrato-quadratica adfecta adjunctione planoplani sub lateris cubo & data co-efficiente longitudine B = 10.

Nempe constabit ex duabus primis seriebus in hoc ordine, $Lqq + Blc = Fqq$,

sive, $Lqq + 10Lc = 470016$, potestas quad-quadr. adfecta.

| | | | |
|---|--------|------|---|
| Potestas resolvenda. | . | . | puncta quadrato-quadratica. |
| | 470016 | (24. | radix investiganda: |
| Caute locabis co-efficientem quia dirigit modum locandi species in quas ducitur, ut postea planius intelliges. Et pro A extrahere radicem quad. quadr. 2 primo puncto, nempe 47 = 2 | . | . | puncta cubica pro co-efficiente longitudine subcubica B = 10. |
| | 10 | | co-efficiens in suo loco. |
| | 16 | Aqq | } plano-plana diagonalia adfecta è potest. resolv. |
| | 80 | BAc | |
| | 240 | | summa ablatitia. |
| | 230016 | | resid. potest. resolvenda. |

| | | | |
|-----|-------------------|---|------------|
| 32 | 4Ac | } | diviſores. |
| 24 | 6Aq | | |
| 8 | 4A | | |
| 120 | B ₃ Aq | | |
| 60 | B ₃ A | | |
| 10 | B | | |

47090 ſumma diviſorum per quam divide
 reſid. poteſt. reſolv. = 230016
 oritur 4 = E.

Dividendo in-
 venit minus
 larus = E per
 quod mox gno-
 mon perficien-
 dus juxta ta-
 bulam, ut vi-
 deas,

| | | | |
|-----|--------------------|---|---|
| 128 | 4AcE | } | gnomon. auferend. è poteſt. reſolv. unde reſt. 0. |
| 384 | 6AqEq | | |
| 512 | 4AEc | | |
| 256 | Eqq | | |
| 480 | B ₃ AqE | | |
| 960 | B ₃ AEq | | |
| 640 | BEc | | |

230016 ſumma plano-planorum auferenda ;
 æqualis reſiduo poteſtatis reſol-
 vendæ.

Quintus ordo eſt quadrato-cubicarum æquationum.

| | | | |
|--------|--|---|-------|
| Lqc = | Aqc | } | = Gqc |
| Blqq = | BAqq | | |
| Cqlc = | CqAc | | |
| Dclq = | DcAq | | |
| Fqq = | FqqA | | |
| | 5AqqE. 10AcEq. 10AqEc. 5AEqq.Eqc | | |
| | B ₄ AcE. B ₆ AqEq. B ₄ AEc. BEqq. | | |
| | Cq ₃ AqE. Cq ₃ AEq. CqEc. | | |
| | Dc ₂ AE. DcEq. | | |
| | FqqE. | | |

In hoc ordine poteſt æquatio conſtare ex 5 ſpeciebus,
 nempe, Lqc + Blqq + Cqlc + Dclq + Fqq = Gqc;
 quibus quinq; ſpeciebus reſpondent in tabula 20 ſpecies,
ſcil. Aqc, 5AqqE, 10AcEq, &c. nam quoniam radix
 (L)

(L) investiganda concipitur constare ex duobus nominibus $A + E$; ergo juxta tabulam posteriorem Lqc , Lqc erit $= Aqc + 5 AqqE + 10 AcEq + 10 Aq Ec + 5 AEqq + Eqc$: & similiter in parodicis gradibus ad altissimam potestatem (Lqc) intelligendum, nempe, in Lqq , Lc , Lq .

Potest etiam æquatio quadrato-cubica constare ex quatuor speciebus, ita, $Lqc + Blqq + Cqlc + Dclq = Gqc$,
vel tribus, ita, $Lqc + Blqq + Cqlc = Gqc$,
vel tantum ex $\left\{ \begin{array}{l} Lqc + Blqq = Gqc. \\ Lqc + Cqlc = Gqc. \end{array} \right.$
duabus, ita, $\left\{ \begin{array}{l} Lqc + Cqlc = Gqc. \\ \end{array} \right.$
8cc.

Ita ut æquationes quadrato-cubicæ 15 Variis modis exhiberi possint; atque ad hunc ordinem pertinet exemplum *Oughtredi*; ad cujus pleniorẽ intelligentiam præmittemus alterius exempli tum genẽsin tum analyfin, scil. $Lqc + Lqq + Lc + Lq + L = Gqc$, sine co-efficientibus aliis præter unitates, quæ subintelligi debent, ac si script.esset $Lqc + Blqq + Cqlc + Dclq + FqqL = Gqc$.

sive, $Lqc + 1Lqq + 1Lc + 1Lq + 1L = 5399042$.

$B=1 Cq=1 Dc=1 Fqq=1$.

Esto genẽsis quadrato-cubi adfecti adjunctiõne quatuor plano-solidorum, scil. $1Lqq + 1Lc 1Lq + 1L$.

ex radice binomia, $A=2$ & $E=2$.

revera ex $A=20$ & $E=2$.

Punctabis autem radicem pro quatuor complemeritorum speciebus, ita, $2 \dots 2$, interponendis inter quadrato-cubos diagonales, Aqc & Eqc , diligenter observando sedes tum diagonalium potestatum lateris primi, tum gnomonicarum, ut in exemplo.

130 Oughtredus explicatus, sive,

Quod etenim ad locationes potestatum, citius eas disces ab exemplorum quam verborum multitudine.

Pro genesi) 2 2

| | | |
|----|------|--|
| 32 | Aqc | } diagonales potestates lateris primi. |
| 16 | BAqq | |
| 8 | CqAc | |
| 4 | DcAq | |
| 2 | FqqA | |

336842 summa diagonalium.

| | | | | | |
|-----|--------|---|--------------------|---|---------|
| 160 | 5AqqE | } | quadratocubicus | } | gnomon. |
| 320 | 10AcEq | | | | |
| 320 | 10AqEc | | | | |
| 160 | 5AEqq | | | | |
| 32 | Eqc | | | | |
| 64 | B4AcE | } | quadr. quadraticus | | |
| 96 | B6AqEq | | | | |
| 64 | B4AEc | | | | |
| 16 | BEqq | } | cubicus | | |
| 24 | Cq3AqE | | | | |
| 24 | Cq3AEq | | | | |
| 8 | CqEc | } | quadraticus | | |
| 8 | Dc2AE | | | | |
| 4 | DcEq | | | | |
| 2 | FqqE | | lateralis | | |

2030622 summa gnomonica quæ addenda summa diagonalium.

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 131

5399042 summa totalis=potest.adfecta, qc.

Potestas resol-
venda.
Pro analysi)

5399042 (22. radix,
puncta superiora.
puncta bina & bina, &c. inferiora.

A=2. 32 Aqc
16 BAqq
8 CqAc
4 DcAq
2 FqqA } plano-solida diagon. abla-
titia.

336842 summa auferenda.

2030622 residuum potest. resolv.

E=2. 160 5AqqE
320 10AcEq
320 10AqEc
160 5AEqq
32 Eqc
64 B4AcE
96 B6AqEq
64 B4AEc
16 BEqq
24 Cq3AqE
24 Cq3AEq
8 CqEc
8 Dc2AE
4 DcEq
2 FqqE } plano-solida gnomo-
nica ablatitia.

2030622 summa plano-solid. auferend.

& = residuo potest. resolv.

K 2

Diviso-

Divisores seorsim positi.

Quatuordecim par-
ticulares diviso-
res juxta tabu-
lam.

| | |
|----|-------------------|
| 80 | 5Aq |
| 80 | 10Ac |
| 40 | 10Aq |
| 10 | 5A |
| 32 | B ₄ Ac |
| 24 | B ₆ Aq |
| 8 | B ₄ A |
| 1 | B |
| 12 | Cq3Aq |
| 6 | Cq3A |
| 1 | Cq |
| 4 | Dc2A |
| 1 | Dc |
| 1 | Fqq |

919884 summa divisorum per quam
divide residuum potestatis
resolvenda

=2030622, oritur 2.

Si punctum aliquod (in potestate resolvenda) qua-
drato-cubicum superesset duo latera elicitaungerentur
vice unius, pro eductione lateris tertii ut secundi, quem-
admodum fit in puris, atque patet ex genesi quadrato-
cubi, in cap. 16.

Hactenus A fuit tantum = 2 ; sed in proxima opera-
tione, si opus esset, A esset = 22 : & proximum reliquum
dividendum esset per divisorem ex A = 22, juxta ta-
bulam legitimè conflatam pro E latere singulari tertio.

Vifus

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 133

Vifus est tibi forfan Author nofter fatis fuperque obfcurus, jam vero proculdubio in gratiam redibit.

In genefi quadrato-cubi adfecti vides me latus (22) in duo nomina divififfe; nempe, $A = 20$ & $E = 2$; mox, pro ratione tabulæ, primum pofui ex latere primo fingulari potestates omnes diagonales in fuis quasque fedibus, *fcil.* Aqc , Aqq , Ac , Aq , A .

Et pariter in fuis locis fingularum harum potestatum correspondentia complementa, ut, $5AqqE$, &c.

Et quamvis hæc æquatio, $Lqc + Lqq + Lc + Lq + L = 5399042$ nullos numeros co-efficientes habere videatur; appofuimus tamen co-efficientes B , Cq , Dc , Fqq , fingulis fubintelligendo unitates: dein in analyfi, ex primo puncto 53 eduximus radicem quadrato-cubicam $2 = A$, ex qua inventa confecimus potestates diagonales auferendas è potestate refolvenda, quod & fecimus, restabat 2030622, quo divifo per 919884, diviforem juxta tabulam legitimè conflatum, oriebatur $2 = E$ lateri fecundo, per quod demum gnitionem perfecimus, perfectumque ex residuo fubtraximus.

His noftris addit exemplum *Oughtredi* hæc tria:

1. Co-efficientes in majoribus numeris, ut, $B = 3$, $Cq = 16$, $Dc = 125$ & $Fqq = 1296$, qui fi non fuiffent figurati, quomodo tamen pro fuo quisque genere reputandus jam fatis diximus.

2. Unciis auget co-efficientes, ut æquatio obtineat formam ordinis quadrato-cubici in tabula posteriore, ita, $Lqc - 5Blqq + 10Cqlc - 10Dclq + 5Fqq = Gqc$; adeo ut tandem co-efficientes fint 15, 160, 1250, 6480; ideoque, omiffis unciis, per B intelligit 15, per Cq 160, per Dc 1250, & per Fqq 6480; ac fi dixif-

134 Oughtredus explicatus, sive,

set, sumatur, ut lubet, $B = 15$, $Cq = 160$, &c.

3. Habet etiam & id, exemplum *Oughtredi*, quod species sunt alternatim negata, ut $Lq - Blqq$, &c. ideoque signorum magna habenda ratio tum in genestum in analyfi; & in analyfi ubique diligenter observentur signa, tum pro diagonalibus inter se vel à se invicem addendis vel subtrahendis; tum etiam in divisoribus constituendis, & tandem in gnomone perficiendo; quod me monuisse memento, nè aqua hæserit.

Ubi ad primi exempli resolutionem veneris in eo primum videbis potestatem resolvendam punctatam, tum supra, pro ratione quadrato-cubica; tum infra, prout co-efficientes subgraduales (pro graduum in quos ducuntur ratione) postulant, ita,

$$\begin{array}{r|l}
 1703 & 04782 \\
 \hline
 15 & -B \text{ co-efficientes suis sedi-} \\
 1250 & -Dc \text{ bus locata.} \\
 \hline
 160 & +Cq \\
 6480 & +Fqq \\
 \hline
 & \&c.
 \end{array}$$

Quod

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 135

Quod si habueris exemplum cum pluribus punctis quadrato-cubicis, ita infra punctandum,

• • • • quatuor puncta qc.

4626356712345678

• • • • quatuor puncta qq.

• • • • quatuor puncta cubica.

• • • • quatuor puncta qu.

• • • • quatuor lateralialia.

15

—B co-efficientes in suis

1250

—Dc locis.

160

+ Cq

6480

+ Fqq.

Nam si genesin observaveris, hæc sunt ipsissima loca in quæ affectiones subgraduales aggregati (ut sic dicam) resolvendi intrusæ fuerunt, (ut mox ostendemus.) Potestates diagonales & reliquæ quæ sequuntur species, pro gradus sui ratione, similem locandi ordinem observant; nempe in singulis reservata sibi senioritate sua.

Jam supervacaneum est, & vereor nè nimis sim, si te monuerim, 7249920| ablatit. auferendum esse è potestate resolvenda, unde restat 978|05582, Residuum

potestatis resolvendæ, quod per Res. significatur, omissis reliquis punctis præter hæc prima in secundâ operatione. Estque hoc residuum dividendum per divisorem 10162375, qui constat ex octo particularibus divisoribus affirmativis, 5 Aqq, &c. & sex negativis, —B4Ac, &c. pro latere secundo, E=7, eruendo; tum perficitur gnomon ex speciebus affirmativis & negativis, pro 978|05582, ablatit. hoc est, numero aufe-

K 4

rendo

136 Oughtredus explicatus, siue,

rendo ex residuo potestatis resolvenda, unde restat 0,
& analysis absolvitur.

Si nimis fuerim, nescio quo me abreptum Autho-
ris brevitatis in contrarium vitium impulerit.

Promissorum memor :

| | |
|------------------|-------------------------------------|
| esto radix | $= 22 = L = A + E.$ |
| ejus quadratum | $= 484 = Lq = Aq + 2AE + Eq.$ |
| cubus | $= 10648 = Lc = Ac + 3AqE, \&c.$ |
| quadrato-quad. | $= 234256 = Lqq = Aqq + 4AcE, \&c.$ |
| pur? quadr-cub. | $= 5153632 = Lqc = Aqc, \&c.$ |
| ex his omnibus | $.504.$ |
| aditis fiat qua- | 5399042 |
| drato-cub.adfec. | |

Dicas, Quomodo ego jam extraham latus hujus qua-
drato-cubi adfecti (L) $= 22$; quandoquidem ipsam
latus 22, una cum aliis potestatibus, confusim in unam
summam aggregantur, unde omnes quasi penitus obli-
terantur?

Respondeo, Non tantam esse confusionem quin co-
gitare possis unamquamque potestatem in loco suo pro-
prio subsistere summa latere; ideoque si conceperis (22)
esse radicem binomiam ex $A + E, = 10 + 2$, facile per
genesin, juxta species (ex tabula posteriore) nume-
ris hic appositas, loca omnia eorumque rationem no-
veris, & quo pacto ex retrograda, quæ omnino cernitur
compositionis via, facienda sit analysis.

Hactenus ubique Lectori infantulo præmansum ci-
bum obtuli; nempe affirmatarum æquationum facil-
limas selegi, atque istiusmodi, quæ planissime ad exem-
plum Authoris viam sternerent; neque tamen adulti
prorsus contemnant methodum qua usi sumus vel ob me-
moriam

moræ usum vel saltem rei ipsius summam dignitatem; quandoquidem si tales æquationes plures habuerint adfectiones in superioribus ordinibus, hac planissima methodo, certissimè & infallibiliter, sine hæsitantia, (juxta leges præscriptas, operante arithmetico) resolvantur, ut, $Lcc + Lqc + Lqq + Lc + Lq + L = 123$, &c.

Imo si species ad terræ centrum pervenerint, inde *Metbnsalah* aliquis radicem extraxerit.

Nempe quando co-efficientes sunt vel unitates vel in minoribus numeris, vel saltem in non magnis, ut in exemplo Authoris: His præmissis, (ut oportuit) jam ad alia transeamus; namque (fatebor enim) sunt æquationes ut non omnes unius ordinis, ita neque ejusdem facilitatis, quin earum quædam tam densis sub involucris reconditæ, tantum analytæ negotium faceffant, tantamque lubricitatem (periculi sane plenam) admittant, ut ars ipsa ad conjecturam declinare quibusdam videatur, ad hujusmodi etiam æquationes jam accedamus.

Quædam æquationes mixtim negantur & affirmantur, in quibusdam co-efficientes sunt valde magni, in aliis ad æquilibrium vergunt, in quibusdam denique suprema potestas est negativa, ut, $Blq - Lqc = 123$, &c. Et in resolvendo (ad latus primum inveniendum) tribus modis proceditur; 1. extrahendo radicem; 2. dividendo; 3. per reductionem analyticam: Hactenus primo modo solum usi sumus negligendo co-efficientes in extractione singularis lateris primi, juxta primam regularum sequentium quas Author tradidit in sect. 18. pag. 117. 'Latus singulare primum elicitur ex his Regulis, desumptis ex duobus consecutariis in Sect. 6. & 8.

' Prima,

Prima, Si co-efficientis ita longe in posteriora decedit ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omnino poterit.

Secunda, Si co-efficientis in anteriora prorumpit, sitque affirmativus; devolendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat: per quam divisionem quotus inventus ad gradum affectionis referretur: quod etiam in extractione minoris radicis æquationibus ambiguae intelligi debet.

Tertia, Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa co-efficientis, pro suo genere, radix.

Quarta, Si utrobique puncta sint aequalia, & numerum in primo tum co-efficientis, tum potestatis resolvendæ puncto, non multum discrepent: Co-efficientis per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per analyticam multiplicationem) reductus, potestati resolvendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si affirmativus. Nam si sit $Ac \pm CqA = Dc$, erit $Ac = Dc - CqA$. At si æquationis ambiguae latus majus quærat, potestas resolvenda è co-efficiente reducto auferatur. Nam si sit $CqA - Ac = Dc$, erit $Ac = CqA - Dc$, tum summa, vel differentia radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod æquationis ambiguae latus majus, aliquando per divisionem, aliquando per extractionem radicis è co-efficiente, sed plerumque, per reductionem co-efficientis investigatur.

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 139

In exemplis hactenus à nobis propositis, co-efficientes fuerunt parvi; ideoque per extractionem radices, è primo puncto potestatis resolvendæ, pro suo genere, (neglectis co-efficientibus) incepimus; verum si co-efficientes (affirmativo signo donati) fuerint magni, adeoque ut in anteriora proruperint, nempe, si prima figura co-efficientis, in suo loco positi, extenderit ultra primam figuram potestatis resolvendæ, *scil.* ita,

$$Lc + 23456 L = 46920.$$

duo puncta cubica.

potestas resolv. 46920

duo puncta lateralialia.

23456 co-efficiens in suo loco & in anteriora prorumpens.

Certe in hoc & similibus casibus non incipiendum per educationem lateris cubici è primo puncto potestatis resolvendæ, *scil.* 46; sed alia via tenenda juxta regulam Authoris secundam, & per modum secundum à nobis propositum, id est, dividendo potestatem resolvendam per co-efficientem, cui divisioni, donec locus fiat, devolvendus est co-efficiens in puncta consequentia, & esto regula perpetua, Quot punctis retrocedet co-efficiens, tot puncta superiora delebuntur.

Exemplum ita stabit,

potest. res. 46920 (2.

23456 co-efficiens devolutus p quem dividenda est potestas resolvenda; oritur 2,

Sit

Oughtredus explicatus, sive,

Sit hujus generis alia aquatio,

$$234234234 L + Lc = 5153163796.$$

potest. resolv. 5153163796
 quatuor puncta cubica.

234234234
 quatuor puncta lateralialia.
 co-effic. in suo loco & in
 anteriora prorompens.

Forettas resol-
 venda.

$$5153163796 (22.)$$

$$Cq = 234234234$$

co-efficiens devolutus punctis supra & infra par-
 ter deletis.

Species di-
 agonales
 ablatit.

}

8

Ac jam locum est divisioni, & oritur 2=A.

$$468468468 CqA.$$

Summa ablat.

$$468469268$$

Resid. potest.

$$468471116$$

12

3Aq

6

3A

divisores.

$$234234234$$

Cq

$$234235494$$

Summa divisorum per quam divide residuum
 per E.

24

3AqE

24

3AEq

solida gnomonica ab-
 latitia.

8

Ec

$$468468468$$

CqE

$$468471116$$

Summa=residuo potest. resolv.

Ratio

Ratio operationis est, quia cubus (Lc) in hoc casu potius addicit quam adfcitur; ideoque à nobis ultimo (in æquatione) loco positus; quandoquidem cubus (Lc) = 10648 est longe minor solido ex radice & co-efficiente; ideoque hoc potestatem adfectam principalius dividet; & quandoque magnitudo co-efficiens tanto major est potestate ut hæc ab illa penitus absorbeatur, ut $2000000 A + Aq = 4000004$. Esto $A=2$, certe Aq valet tantum 4, at $2000000A$ valet 4000000, quem si divides per 2000000 necessario oritur $2=A$; neque plus orietur si ad 4000000 addideris $4=Aq$, unde erit 4000004 dividendus: nam quoniam quadratum $Aq=4$ est longe minus co-efficiente, fieri non potest ex ejus additione, (si divides per co-efficientem,) fieri (inquam) non potest ut plus habeas pro quotiente quam 2, nisi addas saltem 2000000 ad 4000000, & tum haberes 3 pro quotiente.

Sed aliud, & id quidem majoris momenti, ex hac regula Authoris secunda monendum, nimirum quod quotus ad adfectionis gradum referendus; per gradum adfectionis intelligit gradum magnitudinis quæsitæ (ut L Lq Lc, &c.) in quam co-efficiens ducitur; nam hæc est homogeneorum lex, ut si exem. gr. solidum ex tribus constans dimensionibus divides per planum, orietur longitudo; si per longitudinem, orietur planum: atque hoc est analyticè dividere: desumpsit hoc monitum Author ex conspectuario secundo, sectione 8. pag. 114.

Secundum est, Si potestas resolvenda per co-efficientem dividatur, quotus ad ipsum adfectionis gradum referretur; hoc est, quotus erit latus, si affectio sit sub latere; vel quadratum, si sub quadrato; & sic
de

de reliquis gradibus: Ut in priore æquatione, si
 170304782 dividatur per 15, quotus erit quadrato-
 quadraticus; si per 160, quotus erit cubicus; si per
 1250, quotus erit quadraticus; si denique per 6480,
 quotus erit lateralis. Quare non semper ipse quotus,
 sed ipsius plerumque radix pro affectionis gradu, erit
 latus singulare eliciendum.

Esto, 10000 $Lq + Lc = 5773824$.

5773824 potest. resolv.

10000

co-efficiens in suo loco ante devoluti-
 onem.

Punctandum esset ita; sed, ut sit locus divisioni, fi-
 at devolutio, ita,

potest. 5773824 (24 radix

co-eff. devolutus 10000

Tum divide 5 per 1, oritur 5, sed non scribes 5 in
 quotiente pro latere primo A, sed ejus latus quadra-
 tum 2, ut propria tua ratio dictare potest; quia si
 10000 Lq dividatur per 10000, necessario oritur Lq .

Et cubus additus, scil. Lc , quoniam est solido minor,
 hunc operandi modum nihil perturbat.

Idem in altioribus potestatibus non difficulter osten-
 derem, nisi res esset nimis plana ex hoc exemplo.

Tertia regula spectat ad æquationes in quibus co-ef-
 ficientes negativi sunt adeo magni, ut vel in anteriora
 prorumpant, vel saltem pluribus punctis constant quam
 potestas resolvenda, ut mox explicabimus; monen-
 dum autem prius, quod si co-efficientes negativi sint
 minores, per primam regulam æquationes ejusmodi re-
 solvenda,

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 143

solventur, extrahendo radicem è primo puncto :

ut, $Lc - Cql = Dc$, five $Lc - 4L = 10560$.

• • puncta cubica.

Potestas resol-
venda. 10560 (22 radix.

•• tot puncta lateralìa quot cubica.

Radix = 22.
Extrahe rad.
cub. è primo
puncto 10, pro
 $A = 2$. 4 co-efficiens in suo loco.

$$\begin{array}{r} 8 \quad Ac \\ -8 \quad -CqA \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 8 \\ -8 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{species diagonal. \& } -CqA \text{ tollend.} \\ \text{ex } Ac, \text{ ac si cyphræ adscriptæ fu-} \\ \text{issent ita, } 8000 \text{ } Ac \\ -80 - CqA. \end{array}$$

Differ. ablat.
è pot. resolv.
792

Resid. potest.
resolv. 2640

$$\begin{array}{r} 12 \quad 3Aq \\ 6 \quad 3A \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 12 \\ 6 \end{array}} \right\} \text{divisores affirmativi.}$$

Summa, 126

-4-Cq, divisor neg. tollend. ex affir.

1256 differ. divisorum, per quam divide resid. potest. resolv
oritur 2.

$$\begin{array}{r} 24 \quad 3AqE \\ 24 \quad 3AEq \\ 8 \quad Ec \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ 8 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{complementa gnomonica} \\ \text{adfirmativa.} \end{array}$$

2648 summa compl. adfirm.

-8 -CqE, compl. negar. auferend. ex
affirmativis.

Differ. ablatit. 2640 =residuo potest. resolvenda.

Hujusmodi

Hujusmodi æquationes sunt planæ & faciles, si cante signorum cura habeatur; & ratio est, quia cum co-efficientes sint minores, parum minuunt potestates superiores; ideoque in operando accedunt ad resolutionem potestatum purarum.

Nam in exemplo $Lc = 10648$, cujus primi puncti latus cubicum pro latere primo est 2; idem, haud minus habeatur, si prius tollatur $CqL = 88$, restat enim 10560 , cujus primi puncti latus cubicum est etiam 2.

Difficultas autem in co-efficientibus negativis, cujus causa regula tertia est instituta, est, quando co-efficientes negatur de potestate ita ut in anteriora prorumpat, vel adeo magnus est, ut pluribus gaudeat punctis co-efficientens pro suo genere, quam potestas resolvenda pro suo.

Enimvero non solum potestas resolvenda punctanda est tum supra tum infra, quum ad operandum perventum, sed prius seorsim in æquatione, punctandi sunt etiam & ipsi co-efficientes infra, ita, $Lq - 240 L = 484$, quemadmodum in sectione 11. hujus videris, & ubique in exemplis Authoris, nempe, pro sua quisque specie, ut co-efficientens longitudo ita, 15, scilicet lateralibus punctis; planum ita, 160, quadraticis; solidum ita, 1250, cubicis; plano-planum ita, 06480, quadrato-quadraticis punctis.

Nimirum ut inde innotescat quot sint singulæ figuræ, vel quot binæ, vel quot ternæ, in co-efficiente, respondentes totidem correspondentibus punctis in potestate resolvenda pro suo genere; & vicissim, in hunc finem, ut si plura sint puncta in co-efficienti quam in potestate, inde statuatur majoritas ex parte co-efficientis, ut in exemplo, $Lq - 240 L = 484$, quoniam duo sunt tantum quadratica puncta in 484 potest. resolvenda, & tria lateralibus

lateralia in co-efficiente 240 : hinc concludatur planum adiciens 240 L, majus esse potestate resolvenda 484.

Ideo in hoc casu potestatem resolvendam resolutioni præparabis, circuloꝝ numeralium eam multitudinem præponendo mutilæ potestati, ut illa tot puncta habuerit pro suo genere quot co-efficientis habet pro suo; nempe, in exemplo, præpones mutilo quadrato 484, quod idcirco à magistro (artis inventore) acephalum vocatur, (quasi capite truncatum) præpones, inquam, tot cyphras ut illud tot puncta quadratica sibi præfigenda vendicet quot simplices figuras (id est, quot puncta lateralia) habet co-efficientis longitudo; ita,

. . . tria puncta quadratica.

co484

. . . totidem lateralis.

240 co-ffic. in suo loco.

Pro resolutione autem potestatis regula est.

Pro latere primo singulari, sumatur ipsa co-efficientis pro suo genere radix.

In præsentī exemplo quadratico, quoniam co-efficientis est longitudo, accipe non radicem, (neque enim radix è longitudine expectanda) sed primam figuram in 240, nempe, 2.

In ordine alio, ut cubico, ubi co-efficientis sit planum, accipe primi puncti latus quadratum pro primo latere.

In ordine quadrato-quadratico, ubi co-efficientis sit solidum, accipe latus cubicum, & in cæteris similiter agendum.

Diximus jam ante processum in primo latere eruendo tribus modis operando suscipiendum, scil. extrahendo, dividendo, & reducendo; hic autem apparet primum

L

modum

146 Oughtredus explicatus, sive,

modum subdivisionem pati, vel enim extrahis radicem è potestate resolvenda, juxta primam regulam; vel è co-efficiente, juxta hanc tertiam.

Exempl. esto, $Lc - Cql = Dc$, sive $Lc - 452L = 704$.

In hoc exemplo, quoniam duo sunt puncta quadratica in co-efficiente 452, ideo circulus præponetur potestati resolvendæ 704, ut & ibidem etiam sint duo puncta cubica, ita, 0704; at verò, quoniam co-efficiens sublateralis 452, ex duabus constat dimensionibus, non prima figura 4, in 452, sed radix ejus (quippe primi in co-efficiente puncti) quadrata sumetur pro latere primo, viz. $2 = A$; atque hic plane intelligis, quod non proposuimus chimæricum vel inutile figmentum supra, quum diximus co-efficientem reputandum, vel tanquam planum vel solidum pro ordinis sui ratione.

$22 = L$. potest. resolv.

. . duo puncta cubica.

0704

. . tot lateralia quot cubica.

452 co-efficiens in suo loco.

8

Ac.

-904

-CqA.

Auferes -104 si addas + 104.

-104

differentia diagonalium auferenda è potest. resolv.

1744 resid. potest. res.

12

3Aq

6

3A

} divisores affirm.

126

summa divis. affirm.

-452 -Cq, divisor negativus auferendus ex
affirm.

Differen. 808 divisor per quem divide resid. potest.
oritur 2.

| | | |
|----|------|-----------------|
| 24 | 3AqE | } gnom. affirm. |
| 24 | 3AEq | |
| 8 | Ec | |

2648 sum.

-904 -CqE) gnom. negat. tollend. ex gnom.
affirm.

Differen. 1744 = resid. potest. resolv.

Verum enimvero quandoque ita accidit, nimirum hæc est mortalium fors, ut quanquam puncta sint utrobique æqualia, tamen nequeas elicere latus primum sive per extractionem radicis, vel è primo puncto potestatis, vel parili co-efficientis, sive dividendo potestatis. resolvendam per co-efficientem; ut in hoc exemplo:

$Lq - 6oL = 16co$: vera radix est 80.

Si divides 16 per 6 oritur tantum 2: tum quod ad radicem quadratam attinet, ea ex 16 est tantum

$\left\{ \begin{array}{l} 1600 \\ \dots \\ 60 \end{array} \right\}$ puncta
æqualia.

4: denique, si, juxta regulam tertiam, iumeres primam figuram co-efficientis, (quoniam in hoc exemplo co-efficiens est longitudo) ea est tantum 6, sed tu debes habere 8. Quid ergo jam agendum? Est quidem hoc negotium satis difficile, in quo tamen proculdubio, quicquid ars præstare potest, exhibuit artis analyticæ magister, mortalium ingeniosissimus, *Vieta*.

Accedamus igitur ad quartam regulam Authoris, in qua in hunc finem instituitur analytica reductio. Quid est autem analytica reductio? Est nihil aliud quam reductio co-efficientis ad idem magnitudinis genus cum potestate resolvenda, quod fit juxta primum Authoris confectarium, sect. 6. pag. 112.

‘Si co-efficientis, pro sua specie, radix, ducta in affectionis gradum, multiplicet ipsum co-efficientem; factus erit ejusdem generis cum potestate resolvenda: ut in precedente æquatione, si latus 15 quadrato-quadraticè multiplicatum, ducatur in 15; & si $r q$ 160 cubatum, ducatur in quadratum 160; & si $r c$ 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique, si $r q q$ 6480 ducatur in quadrato-quadratum 6480; ex singulis hisce multiplicationibus emerget numerus quadrato cubicus. Atque hæc multiplicatio analytica, modus est reducendi co-efficientem quemlibet ad speciem potestatis resolvenda, in lateris primi singularis extractione usitatissimus.

In præsentis exemplo $Lq - 60 L = 1600$, quoniam 60 est longitudo, est ipsa radix; & quoniam jungitur cum (L) gradu laterali eatenus invariata manet; sed tum debet saltem multiplicare seipsam, hoc est, quadrari; quod si (in æquatione cubica) junctus fuisset 60 cum Lq , ita, 60 Lq , (ut reducat:) quoniam 60 est longitudo, nulla radix expectanda, sed mox quadrari debet propter gradum adfectionis (Lq ;) & demum, quadratum in co-efficientem ducendum, ut fiat solidum; atque reductio peracta est. Redeamus ad æquationem $Lq - 60 L = 1600$, erg. per antithesin, $Lq = 1600 + 60 L$.

$$\begin{array}{l}
 1600 \text{ potest. resolv.} \\
 \underline{60} \text{ co-eff. in suo loco.} \\
 \left. \begin{array}{l} 36 \text{ co-efficiens reduct.} \\ 1600 \text{ potest. resolv.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Lq = 5200 \\ L = 8 \text{ proxime} \\ \text{major quam ve-} \\ \text{ra radix quadr.} \\ \text{è 52, quæ est 7.} \end{array} \\
 5200 \text{ summa.} \end{array}$$

Reducendo co-efficientes, non semper pervenies
mox ad latus verum, ut in exemplo ad 8, sed plerum-
que ad proxime verum, ut ad 7.

Præstat etiam hoc artificio analytico uti quandoque
etiam in co-efficientibus affirmatis (quanquam illorum
gratia haud principaliter inventum) nisi te malles de-
lulum iri; præsertim cum puncta sunt utrobique æqua-
lia, & numeri in primo tum co-efficientis tum potesta-
tis resolvendæ puncto non multum discrepant; i. e. co-
efficientis neque multum prorumpit in anteriora, neque
multum recedit; quo casu co-efficientes neque magni
sunt neque parvi valoris pro natura æquationis, sed
magnitudo afficiens ad æquilibrium sive æqualitatem a-
liquam accedit cum potestate affecta. Verum in adfir-
matè affectis factorum differentia sumatur.

Proponit *Vieta* hoc exemplum,

$1 Q + 8 N = 128$, sive $Lq + 8 L = 128$:
ordinatis ad opus, ut ars post devolutionem exigit, figuris.
Nimirum,

$$\begin{array}{c} 128 \\ 8 \end{array}$$

Quoniam differentia inter planum 128 & 64 quadra-
tum, à co-efficiente 8 est 64, ideo sumetur radix 8.

$$L \ 3$$

Dices,

150 Oughtredus *explicatus, sive,*

Dices, Quare sumis hic differentiam non summam, ut ante?

Respondeo, Quia si $Lq + 8L = 128$.

Erg. per antithesin, $Lq = 128 - 8L$.

Jam co-efficiens 8, analytice reductus, est 64.

Erg. $Lq = 128 - 64$. erg. $L = 8$.

Hoc loco videor mihi te dicentem audire, Quæ scripsisti intelligo; & video te (per reductionem co-efficientis 8, ad planum 64,) substituissse 64 loco 8 L, cum veritate rei & successu oprato: Ego autem nescio an hic modus reducendi co-efficientes ubique pariter succedat: puta, in ordine quadrato-cubico, $9Ac = Cq$ Ac, reducatur 9 ad quadrato-cubum juxta consuetarium: ejus radix quadrata 3 cubetur propter gradum adfectionis Ac; fit 27, qui ducatur in 9; fit $243 = Cq$ Ac, qui est quadrato-cubus rationalis ex 3: sed in æquatione quæ mihi proponatur, nihil sit necesse, ut Ac fit cubus ejusdem numeri cujus 9 est quadratus; sed per Ac potest intelligi 125, cubus ex 5, qui ductus in 9, efficeret 1125, qui valde excedit 243: ego interim nihilo minus procedere debeo analytice reducendo, ut jam est expositum pro 243, atque ita à veritate longe recedam.

Respondeo, Verum est, quod co-efficientes reducti rarissime exprimunt verum valorem magnitudinum quarum loco substituuntur, ut in his paucis exemplis videris.

Esto $A = 3$. $Aqq = 81$.

$Aqq - 2Ac + 16Aq = 171$.

Erg. per antith. $Aqq = 171 + 2Ac - 16Aq$, reducantur co-efficient. & erit $Aqq = (171 + 16 - 256) = -69$. quod absurdum.

Aqq

Commentarius in ejus Clavem Mathem. 151

$$Aqq - 2Ac + 9Aq = 108.$$

Erg. $Aqq = 108 + 2Ac - 9Aq$. reducendo co-eff.

Erit $Aqq = (108 + 16 - 81) = 43$. non consentaneum, quia $Aqq = 81$.

$$Aqq - 3Ac + 16Aq = 144.$$

Erg. $Aqq = 144 + 3Ac - 16Aq$. reduc.

Erit $Aqq = (144 + 81 - 256) = -31$. absurd.

Verum enimvero hic operandi modus per reductionem analyticam, in æquationibus quibus opus est reductione, pro proposito plerunque satis accuratus erit; interim hinc clarissime liquet quid sentiendum de Authoris sect. 7.

Erit, inquam, satis accuratus præsertim post unum aut alterum tentamentum supposito errore, quod (quæso) ne graveris, nisi ingratus audire velles, quandoquidem contentus esse nolis quanquam habes quicquid ars præstare potest; neque enim potes radicem quadratam in communi Arithmetica ex pura potestate educere, quin aliquando (errore facto, eo quod plus vel minus quam par erat sumpisti) operationem renovare coactus fueris; ita & hic, si (ex diagonalibus computatis, ut decet) habueris numerum potestate resolvenda majorem, certus esse potes, te nimium pro latere primo sumpsisse; ideoque & operationem renovare oportet; atque huc spectant levamina *Oughredi*, per depressionem & canonem Logarithmorum; cur autem satis accurate plerunque ratio hujus rei est, quod, ut ante dixi in istis casibus, erit æqualitas quadam inter magnitudines; atque ita co-efficiens erit vel radix vel radicis gradus ali-

quis, vel ad radicem vel ad gradum aliquem ejus accedet, ut ex co-efficiente reducto numerus emergat vel verus vel ad verum accedens; ex. gr. in exemplo *Vietano*, cujus nuper meminimus, quoniam radix est 8, etiam & co-efficiens est 8, ex 8 in 8 fit 64 exacte; ut & fit ex co-efficiente reducto, est $x^2 - 64 = 8 =$ accurate magnitudini quæ sita. Sed dabo aliud exemplum quo non ad proximè minus perveneris.

$$Lq + 90 L = 11200 \quad (70 = \text{veræ radici.})$$

fiat devolutio, & fit 11200 potest. resolv.

| | | |
|----------------------------|----|--|
| | 90 | co-eff. in suo loco post devolutionem. |
| tolle 81 è potest. resolv. | 81 | co-efficiens reductus |
| differentia | 31 | cujus nempe 31 radix quæ est tantum 5 non proximè minus latere $7 = A.$ |

Hoc tamen dici possit, quod 31 propius accedit ad 36, cujus latus 6, quam ad 25, cujus latus 5.

Instituitur analytica reductio principaliter æquationum ambiguarum causa; & quidem radicis majoris investigandæ gratia; æquatio autem est ambigua quando altissima species est negata, & de duabus saltem exponitur radicibus, (quandoque de pluribus) quarum utraque æquationi satisfaciet; ut in hac æquatione, $370 L - Lq = 9261$; æquatio potest explicari vel de 27 radice minore, vel de 343 radice majore: id autem primo & diligenter observandum, quod radices hujusmodi, limites

limites suos sibi è co-efficientibus assignatos habent, intra quos consistant; ut in ordine quadratico radix major, major erit semisse co-efficientis; & radix minor, erit minor: hac nota sit tibi cynosura, ut in exemplo proposito, 27 minor est quam $\frac{37}{2}$, & 343 major est quam $\frac{37}{2}$.

Ne autem falsitatis præmonstratorem viæ accuses, noveris quod aliquando contigerit æquationem explicari de una radice tanquam duabus, quo casu, semissis co-efficientis erit ipsa radix, ut $12L - Lq = 36$.

$\frac{12}{2} = 6$ est ipsa radix quæsita, cujus 36 est quadr.

In ordine cubico, esto $Cql - Lc = Dc$ quadratum minoris radices, minus est triente co-efficientis Cq, majoris majus in eodem ordine est $B'q - Lc = Dc$, una radix minor est duabus tertiis co-efficientis B, altera major.

In ordine quadrato-quadr. est $Dcl - Lqq = Fqq$, minoris cubus, minor est quadrante co-efficientis solidi Dc, majoris major.

In eodem ordine, esto $Blc - Lqq = Fqq$, unum latus minus est dodrante longitudinis B, alterum majus.

His limitibus præfinitis, certius & facilius procedes in eruendis radicibus; verum aliter longe operandum in radice minore investiganda, aliter in majore; quod ad minorem attinet, operandum pro primo latere, juxta regulam Authoris secundam, per analyticam, analyticam (inquam) divisionem, ut in exemplis Authoris, 9, 11, 13, potestas altissima vocatur avulsa, addita autem potestas lateris singularis primi resolvendæ magnitudini restituit potestatem avulsam, tum homogenea sub gradu, ut in exemplo, 370 L, auferenda est à potestate
ita

154 Oughtredus explicatus, siue,

ita restituta, pro residuo potestatis resolvenda.

Proponatur huiusmodi æquatio, $370A - Aq = 9261$.
vel, $370L - Lq = 9261$.

Radix = 27. 9261 planum sub latere adfectum multa
quadrati.

$B = 370$ co-efficiens per quem divide 9261 , o-
ratur $2 = A$ primo lateri.

Divide 92 per
37, ut habeas
 $2 = A$.

4 Aq. potestas restituens.

9661 potestas restituta.

740 BA. homogenea sub gradu tollend.
è potestate restituta.

2261 resid. potest. resolv. }
 370 B. co-efficiens motus } divisores.
 $-4-2A$ ----- }

330 differentia divisorum, per quam divi-
de resid. pot. ref. oritur $7 = E$.

$-28-2AE$ }
 $-49-Eq$ } gnomon quadraticus.

2590 BE. gnomon lateralis.

2261 differentia gnom. = resid. potest. ref.

Paradigma in hunc modum descripsimus,
ut aliquo pacto rationem operationis videres,
restituendo potestatem avulsam.

Verum

Verum in idem res recideret hoc modo operando,

$$\begin{array}{r} \cdot \\ 9261 \end{array} \text{ planum adfectum.}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \\ 370 \end{array} \text{ co-effic.}$$

$$\begin{array}{r} -4 \\ 740 \end{array} \begin{array}{l} -Aq \\ -BA \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -4 \\ 740 \end{array}} \right\} \text{ species diag.}$$

$$\begin{array}{r} 700 \end{array} \text{ differ. ablatitia.}$$

$$\begin{array}{r} 2261 \end{array} \text{ resid. potest. resolv.}$$

&c. Esto aliud exem. $57 L - Lc = 24300.$

Radix = 30. 24300 solidum adfectum multa cubi, $BAq -$

$$\cdot \cdot \quad A c = 24300.$$

$$\begin{array}{r} 57 \end{array} \text{ co-efficiens in suo loco.}$$

$$\begin{array}{r} 3 = A. \\ 513 \end{array} \begin{array}{l} -27 -Ac \\ CqA \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3 = A. \\ 513 \end{array}} \right\} \text{ spec. diag.}$$

In hoc exemp.
analyticè div.
24 per 5 quot.
est fere 5, cu-
jus radix qua-
drat. est fere 3,
ergo sumis
 $3 = A$, juxta
regulam terti-
am, neque po-
tuiti sumere 4
pro latere pri-
mo, tum prop-
ter limites præfinitos, qui te impediunt, quin & ad opus redintegrandum inter operan-
dum coactus fueris; radix major est 45.

$$\begin{array}{r} 243 \end{array} \text{ differentia ablatitia.}$$

000 residuum potest. resolv. unde habetur

$$0 = E.$$

Aliud

156 Oughtredus explicatus, sive,

Aliud exemplum in ordine quadrato-quadratico:
esto 65 Lc—Lqq= 1481544.

Radix = 38.7 1481544 plano-planum adfectum.

B = 65 co-efficiens in suo loco.

Dividendo a-
nalyticè 148
per 6, quoti-
ens est 24, qui
est fere cubus
ex 3, ideo su-
mis 3 = A.

—81 —Aqq } spec. diagon.

1755

BAC

945

differ. ablatitia.

536544 resid. pot. res.

—108

—4Ac

—54

—64Aq

—12

—4A

divisores neg.

—11352

summa divis. neg.

1755

B3Aq

585

B3A

65

B

divis. affirm.

181415

summa divis. affirm.

67895

differentia summarum per quam
divide resid. oritur 8 = E.

—4AcE —864

—64AqEq —3456

—4AEc —6144

—Eqq —4096

gnomon. negat.

—1275136

summa negat.

$$\begin{array}{r} 14040 \\ 37440 \\ 33280 \end{array} \begin{array}{l} B3AqE \\ B3AEq \\ BEc \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 14040 \\ 37440 \\ 33280 \end{array}} \right\} \text{gnom. affirm.}$$

$$1811680 \quad \text{summa affirmat.}$$

$$536544 \quad \text{differentia summarum.}$$

Ablatitia & = residuo plano-plani adfecti, radix major est 57.

Hactenus versati sumus in investiganda radice minore æquationis ambigua. Quod attinet ad radicem majorem, ea invenienda triplici methodo: Vel,

1. Dividendo potestatem resolvendam per co-efficientem.

2. Sæpius per extractionem radicis congruæ à co-efficiente, pro suo magnitudinis genere.

3. Ut plurimum autem per reductionem co-efficientis analyticam; hic etiam limites attendendi.

$$\text{Radix} = 45.$$

$$\text{Esto } 57 \text{ Lq} - \text{Lc} = 24300.$$

$$24300$$

$$B = 57$$

In hoc exemp.
divid. 24 per
5, oritur 4=A.
etiam prima
figura 5, in
longitudine
co-efficientis
57, prope ac-
cedit, adeo ut
utroque modo
occurrat.

$$\begin{array}{r} -64 \\ 912 \end{array} \begin{array}{l} -Ac \\ BAq \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -64 \\ 912 \end{array}} \right\} \text{spec. diagon.}$$

$$272 \quad \text{differentia auferenda è solid. adfect.}$$

$$-2900 \text{ resid. potest. resolv.}$$

$$\begin{array}{r} -48 \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{r} -3Aq \\ -3A \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -48 \\ -12 \end{array}} \right\} \text{divis. neg.}$$

$$-492 \text{ summ. divis. neg.}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ 57 \end{array} \quad \begin{array}{r} B2A \\ B \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 456 \\ 57 \end{array}} \right\} \text{divis. affirm.}$$

$$4617 \text{ summ. divis. affirmat.}$$

$$-313 \text{ differ. divisorum, per quam divide}$$

resid. pot. resolv. oritur $5 = E$.

$$\begin{array}{r} -240 \\ -300 \\ -125 \end{array} \quad \begin{array}{r} -3AqE \\ -3AEq \\ -Ec \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -240 \\ -300 \\ -125 \end{array}} \right\} \text{gnom. neg.}$$

$$-27125 \text{ summa negat.}$$

$$\begin{array}{r} 2280 \\ 1425 \end{array} \quad \begin{array}{r} B2AE \\ BEq \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2280 \\ 1425 \end{array}} \right\} \text{gnom. affirm.}$$

$$24225 \text{ summa affirm.}$$

$$-2900 \text{ differ.} = \text{resid. pot. resolvenda.}$$

Quoad radicem minorem, homogenea sub gradu tollitur à potestate restituta; quoad majorem, quandoque, ut in hoc exemplo, & exemplis Authoris, 8, 10, 12, potestas restituta aufertur ab homogenea, sub gradu, quæ facile intelliges, si primum exemplum quoad minorem radicem satis observaveris. Author autem in exemplo ejus octavo numerum 6400 vocat ablatit. qui, quoniam major est quam 4657, è quo tollendus, ideo residuum signo negativo donatur, ita, -17423 : sic in exemplo nostro, si tollas differentiam 272 è 243, solido adfecto, id est,

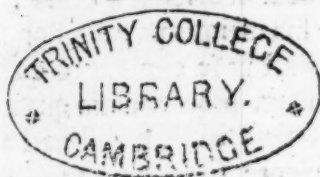
id est, majorem numerum è minore, restabit, non 29, sed — 29.

In exemplis Author, 8, 10, 12, per secundum modum, (extrahendo radices è co-eff.) latus primum investigat. Verum enimvero quandoque dubitatio accidere potest qua via eundum in electione radicis majoris: ideoque & iterum ad reductionem analyticam tanquam ad Apollinem confugimus. Nam si sit $Cql - Lc = Dc$, ergo per antithesin $Cql - Dc = Lc$; unde patet quod potestas resolvenda, Dc , auferenda est ex co-efficiente reducto, & differentia radix cubica erit $= L$: quomodo autem co-efficientes reducendi, jam satis dictum est.

Id unum superest monendum, quod ad intellectum est satis facile, ad praxin difficillimum; nempe, quod pro secundo latere divisio analytica quandoque instituenda, quam clymaeticam appellat *Vietæ*; id est, quotus erit aliquando latus, aliquando lateris secundi quadratus, vel cubus, &c. quia nimirum divisor conflatus est ex multis divisoribus, quorum unus est longitudo, alter planum, alter solidum; & nunc unus, nunc alter præpollet & principalius dividit; unde magna oritur lubricitas, quam tamen *Oughbredi* sagacitas facile effugeret; cujus quidem lubricitatis causa, si Lector ea quæ scripsimus in his ultimis paginis non satis bene intelligat, non opus est ut se nimium torqueat; quoniam ea scripta sunt non tam propter usum quam operis complementum & ad satisfaciendum obstinati animi curiositati; qua tamen mente si fretus fuerit, poterit ipsum *Vietam* (ex nostris (utispero) jam magis intelligibilem) consulere. Spero etiam ex nostris bene intellectis,

tis, & lectis saltem Conicis *Mydorgii*, posse Lectorem tuto aggredi *Cartesii* Geometriam practicam, ubi in introitu videbit duarum Algebraicarum regularum pulcherrimam demonstrationem, & subinde mirabiles methodos construendi problemata ad loca quædam, id est, figuras geometricas, in quibus jacent & terminantur omnes lineæ, quæ similibus proprietatibus gaudent, juxta æquationum altitudines & conditiones, sive illæ figuræ sint circuli sive parabolæ, &c. ego huc etiam in his oculum direxi; jam vero Portum appello; nam operatio per Logarithmos, sect. 7. & 26. (iis qui naturam Logarithmorum nōrint) facilius erit intellectu quam ut explicatione indigeat.

F I N I S.



ASTRONOMICA
SPECIMINA

AD
OBSERVATIONES
PLANETARUM

Faciendas,

&

HOROLOGIORUM

Constructionem.

Authore

GILBERTO CLARK.

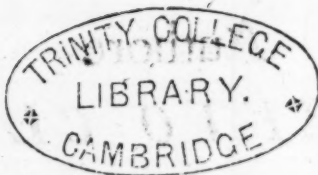
L O N D I N I,

Typis *Milonis Flesher*; Veneunt apud *Ric.
Davis*, Bibliopolam *Oxonienfem*, 1682.

ASTRONOMICA
SPECIMINA

Observationes
ANALYTICAE

MUSEOLOGICUM



AMPLISSIMO VIRO
&
GENEROSO DOMINO,
GUALTERO CHETWYND,
ARMIGERO;

EX

Veteri CHETWYNDORUM Stirpe,

IN

Comitatu Staffordienſi oriundo;

Hæc ſua SPECIMINA Aſtronomica,

In animi grati teſtimonium,

D. D. D.

Gilbertus Clerke.

AMOTISSIMO VITO

E

GENERO DO DOMINO

VALTERO CHATWINDO

ARMIGERO

EX

CHATWINDO M. S. 1792

IN

Comitatus Staffordiensis

STECIMIN. A. Astronomica

In animi grati testimonium

D. D. D.

Gilbertus Clark

A D

OBSERVATIONES
PLANETARUM

Faciendas.

I. **O** Portet Observatorem habere Instrumenta necessaria.

1. Nempe radium cum transversario, cui laminæ vel styli ex ferro mobiles aptandi. Convenit etiam habere arcum, id est, segmentum, circumfer. circuli; ita ut arcus sit gr. 30. & radius annexus sex pedes longus: sed in horum usu caveat Observator ne, 1. decipiatur ab excentricitate oculi, qui, uno objecto conspecto, situm mutat ut alteri obvertatur; hinc ab incauto error committi possit sex vel septem minutorum, in distantis accipiendis: 2. in usu laminarum, id est, pinnacidiorum latorum, si conspectio fiat nunc per interna laminarum latera, nunc per externa, differentia possit esse 10. minutorum, ut *Horoccius* expertus est, qui ergo usus est interno latere unius laminæ & externo alterius; erratum erit majus, quo splendidior stella propter majorem irradiationem; in hujus rei experimentum, si removeatur candela 4. vel 5.

A 3

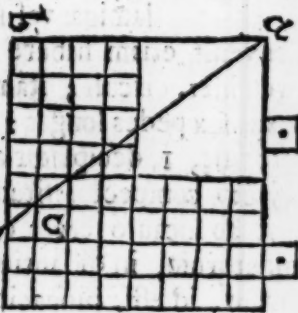
passus,

passus, tum inter oculum & candelam interponatur opacum; certe summities flammæ videbitur altior juxta parietem quam mox sublato opaco.

2. Oportet propter altitudines capiendas habere quadrantem, cujus radius longus sit 3. vel 4. pedes; & convenit habere quadratum *Curlianum* à *Clavio* descriptum in *Morol.* cum dioptris (si opus) cujus quadrati latera in 256. partes æquales dividantur, vel plures, ut ex intersectione linearum innumera oriatur quadratula, quorum unum vel alterum in ipso angulo, puta in *c*, secabitur à filo pensili; tum ex datis lateribus in triang. rectang. *abc*, trigonometricè computetur angulus ad *a*, quoad gradus & scrup. per logarithmos artificiales.

Analogia erit, ut $ab : bc :: \text{rad. ad tang. } bac.$

Nota quod quarta pars quadrati, versus centrum, excindatur tanquam superflua: sed hic etiam Observator caveat ne decipiatur à refractione ab atmosphæra, unde Planetæ altiores videantur quam sint, quemadmodum denarius remotius videbitur in fundo situla si ea fuerit aquæ plena quam si vacua. Consultat igitur tabellas astronomicas in hunc finem compositas.



II. Habeat Observator meridianam lineam fixam & bene notam, ut accurate sciat quando quævis stella fuerit in meridiano; inter alia, propter temporis correctionem, quando Observator horologiis forte minus accuratis

curatis utitur; linea autem meridiana invenitur variis modis.

1. Primus est ope quadrantis horizontaliter positi; fili pensilis & azymuthi cogniti, id est, distantiae Solis à meridiano; quo pacto azymuthus obtineatur, vide *Oughttr. Explic. c. 6.*

2. Si perpendicularis stylus erigatur ex *a*, centro plurium circularum concentricorum, & continuo notetur supremum umbræ punctum; nempe à puncto *b*, observato Hor. 9. jun. 10. vel circiter ad punctum *o*,



in eadem circumferentia, Hor. tertia, ducatur linea *bo*, & alia ab ejusdem lineæ medietate ad centrum *da*, vel perpendicularis, hæc *da*, vel perpendicularis, erit meridiana.

Et ea accurate ducta esset, si motus Solis æqualis esset motui stellæ fixæ; sed, propter proprium motum, in consequentia erit error aliquis, qui tamen (si fuerit perceptibilis) emendari potest; nempe si quoniam Sol in minuto uno tantum spatii conficit motu diurno quantum in sex horis perdidit motu proprio, addatur ultimo puncto in via Solis quantitas motus umbræ per minutum, ut punctum illud notetur non in ipsa circumferentia sed prope, puta, in medio literæ *o*, & fiant reliqua ut prius; hac methodo, in praxi haud aliquid melius occurrat.

3. Media stella & paulo obscurior reliquis ex septem in ur̄sa majore notetur circa 7. hor. noctis in Nov. vel Decemb.

cemb. dein, posita candela in laterna, abeas, si placeat, ad stationem convenientem, puta, 40. vel 50. pass. distantem, ubi figatur funiculus pensilis cum plumbo; tum vide sis ut candela, stella polaris, & obscurior illa in eodem filo pensili conspiciantur; dico quod linea à funiculo ducta ad candelam erit meridiana.

Methodus pro erigendo stylo perpendiculariter.

Fist foramen in plano Horizontali immobili; huic foramini inseratur pars aliqua styli ferrei, qui aliud planum minus & mobile pertransierit, (quantum conjectura fieri possit) perpendiculariter; dein circumvolvatur mobile planum: tum si suprema umbra styli ferrei semper tetigerit unum idemque punctum in plano immobili dum circumvolvitur planum mobile, dico quod stylus ille erigitur perpendiculariter.

III. Observator scire debet quo pacto oculus proxime dirigendus fuerit versus nonagesimum gradum eclipticæ, id est, gradum illum qui maxime elevatur supra Horizontem, & qui distat à puncto oriente 90. grad. ex una parte, & 90 grad. à puncto occidente ex altera parte.

Certe non est difficile per tabulas astronomicas invenire nonagesimum gradum, punctum oriens & punctum occidens ad quodvis tempus datum, atque etiam amplitudines istorum punctorum, id est, distantias eorum ab oriente & occidente: tum in horizontali circulo diviso, & meridiano ducto, ut opus est, ab istis amplitudinibus ducatur linea & altera huic perpendicularis, huic alteri insistat planum perpendicularare; dico quod

quod hoc planum jacebit in circulo nonagesimali, ad tempus datum, nempe in circulo, qui tranfit per polos Zodiaci, punctum loci verticale & nonagesimum gradum; & nota quod circulus transiens per polos Zodiaci necessario secat eclypticam (in quocunque gradu) ad angulos rectos, unde ratio peti potest quare nonagesimalis gradus in observationibus faciendis fit tanti momenti; nempe, quia & circulus verticalis in eodem gradu secat etiam eclypticam ad angulos rectos, & proinde eadem fere erit distantia Planetæ à verticali per stellam horizonti parallelâs sumpta & longitudinum differentia. Vice versa, dato gradu eclypticæ, facile reperiatur quando gradus ille erit nonagesimus; convertendo differentiam inter obliquam ascensionem loci Solis orientis & obliquam ascensionem puncti orientis, convertendo (inquam) hanc differentiam in horas, id est, assignando 15. gradus æquatoris uni horæ, & 15. minuta æquatoris uni minuto; nempe, inde necessario innotescit quantitas temporis comparate ad Solis ortum vel occasum.

Denique hæc problemata omnium facillime solvuntur ope Globi.

IV. Accurate sumenda est ope Arcus supradicti distantia inter planetam & stellam notam, quatenus fieri potest, minime distantes, quia longitudines & latitudines stellarum fixar. notæ sunt, utpote jam pridem investigatæ præcipue per solertiam & laborem nobilissimi *Tychonis*.

V. *Crabtrius* Observationes fecit verticali in fenestra, applicando regulam transeuntem per stellam notam

tam & planetam; nempe, ut inveniret angulum ad verticalem, *viz.* ZL5. in seq. fig.

VI. Oportet habere declinationem fenestraz notam; nempe hinc constiterit præter propter utrum Planeta fuerit in vel prope nonagesimum; præter propter (inquam) nam hoc satis est; inde etiam constiterit quam prope accessit planum fenestraz ad perpendicularitatem cum circulo verticali per Planetam transeuntem, nam situs ille est maxime propius pro angulo sumendo ad verticalem; & reliqui quo propius ad illum accedunt præferendi.

Dein, quoniam declinatio plani æstimatur à linea ad planum perpendiculari infinite ducta ad horizontem, ut arcus interceptus inter meridiem & perpendicularem sit declinatio, si perpendicularis ad verticalem in fenestra & ad planum fenestraz ducatur super tabulatum, azymuthi planetæ & stellæ notæ facile accipiantur.

Declinatio autem plani cujuscunque hoc modo obtinetur; *viz.* quando pro azymutho inveniundo accipis Solis altitudinem ope quadrantis, eodem momento alterius quadrantis horizontaliter positi latus, ab alio Observatore applicetur plano, tum viderit Observator quem gradum in limbo quadrantis secuerit umbra fili perpendicularis per centrum transeuntis: angulus nempe ille inter gradum illum & perpendiculare latus quadrantis memoria tenendus.

Azymuthus autem postea in camera tua per computationem inveniatur; vel sumatur (si placet) à linea meridiana, quam fixam habes eodem momento ut ante.

Tandem

Tandem anguli in memoria retenti & azymuthi summa vel differentia exhibebit declinationem, nempe summa, si umbra fili fuerit inter meridiem & perpendiculare latus; sin autem, differentia; utrum vero umbra fili pensilis fuerit in medio necne, ex diei tempore & parva meditatione facile addiscatur.

His præmissis, accedo jam ad methodos aliquot pro Observationibus faciendis.

1. Proponatur in schemate primo,

— datis $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Azymutho} & \text{AGH} \\ \text{Compl. altit.} & \text{GH} \\ \text{Compl. elev. poli} & \text{GF} \end{array} \right\}$ invenire FH.
Compl. declinat.

Est autem declinatio distantia stellæ ab æquatore.

2. Data planetæ H (in 1. fig.) altitudine, cujus compl. GH, datis etiam distantia stellæ à meridiano BH, & GF compl. elev. poli, hoc est, in triang. GFH, datis GF, GH, GFH, invenire FH = compl. declinat.

Vide *Newton*. li. 2. c. 12. *Harm. Cœlest.* p. 27.

3. Tolle altitudinem æquatoris ex altitudine planetæ meridiana, restabit declinatio planetæ.

Sed data declinatione planetæ cum distantia præmissa inter planetam & stellam notam, dabitur recta ejusdem ascensio; denique, datis planetæ declinatione & recta ascensione, inveniantur longit. & latit. planetæ,

Vide *Harm. Cœl.* li. 2. c. 15, 16. & *Newton*. l. 1. c. 8, 9.

4. In secundæ figuræ triangulo, LOS, ex nota latitudine stellæ = 50, & ex assumpta latit. planetæ LO, nempe, ex tabulis *Carolinis*, vel aliis, & data dist. SL, vel angulo ad verticalem OL5, invenire trigonometricè ang.

ang. LO5 = differentia longitudinum stellæ & planetæ.

5. Quando planeta est in vel prope nonagesimum, tolle altitudinem nonagesimi gradus m, ex altitudine nonagesimali planetæ L, vel contra, restabit L m, latitudo planetæ.

6. Si infallibiliter constaret de tempore multa ostendi possent ex supposito stellam vel planetam esse accurate in nonagesimo; sed quoniam parvus error quoad tempus, magnum errorem quoad longitudinem pareret, nempe, propter continuam mutationem nonagesimi & celerem motum cujusvis gradus in eclyptica, adeo ut in uno horæ minuto, quindecim min. æquatoris conficiantur; ideo unum tantum describam, quia non sit injucundæ contemplationis.

In schemate secundo, hæc omnia quæ sequuntur vel dantur vel accipiuntur, viz.

5ZB, azymuthus stellæ }
LZB, azymuthus planetæ } 5ZL, diff. azymuthorum.

RZB, azymuthus nonagesimi ad quodvis tempus datum.

Altitudines stellæ, planetæ & nonagesimi, cujus comp. SZ, & hujus compl. ZO.

O5, latitudo stellæ notæ.

Distantia inter stellam & planetam, L5.

Angulus ad verticalem, ZL5.

Quoniam ergo in triang. Z5L, sec. fig.

dantur { ZL5, ang. ad verticalem.
LZ5, differ. azymuthorum.
L5, dist. inter plan. & stellam.

Dabitur etiam ang. Z5L.

In triang. ZO5, datur OZ5, viz. compl. duorum a-
zymuthorum, sc. nonagesimi & stellæ $\left\{ \begin{array}{l} \text{RZB.} \\ \text{BZ5.} \end{array} \right.$

Dantur etiam ZO & O5 = latit. stellæ.

Ergo dabitur etiam ang. Z5O.

Denique, in triang. O5L, quoniam dantur duo latera
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{L5} \\ \text{5O} \end{array} \right\}$ cum angulo comprehenso L5O. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Z5L} \\ \text{Z5O.} \end{array} \right.$
= duobus

Dabuntur ang. LO5 = longit. differentia,
& LO = compl. lat. planetæ.

Accipiantur igitur accipienda, quando tempus accu-
rate corrigitur, per stellam aliquam notam in meridano.

7. Compendii causa; sumpta distantia L5, in fig.
3. accipiaturs angulus ZL5, forte commodissime in fe-
nestra, ut ante dictum; indeque, sine ulteriori indagi-
ne, satis bene resolvi possit triang. rectangulum, Lu5,
unde innotescat Lu = differ. longit. sine errore sensi-
bili forte unius vel alterius minuti: Sed tum,

1. Operatio perfici debet in vel prope nonagesi-
mum; nam aliter, propter linearum incidentium obli-
quitatem, ut in seq. fig. potest committi sensibilis error.
Et nota, quod,

2. Quo minor est latitudo planetæ, eo minor erit
incertitudo; atque etiam, quo minor est distantia L5.

3. Et eo certior erit operatio quo major est angulus
ZL5, puta, si fuerit 70 vel 80 graduum. Vide *Crabtrii*
Observ. p. 425. lin. ult. Huic autem in triangulo re-
spondet L5u, scil. ang. alternus; nam quanquam in
schemate verticales ZL & Z5 inclinant ad angulum in Z,
tamen in fenestra tanquam si parallelæ essent consideran-
tur.

Et

Et $Lu5$ est ang. rectus.

Quinetiam ex schemate apparet esse $Lu = mn$ vera long. nam quamvis paulo brevior sit ex parte L , fuerit tamen tanto longior versus u : nota denique, quod si $ZL5$ sit ang. rectus, ipsa distantia $L5$, sive almactantal distantia, erit = longitudinum differentia.

OBSERVATIO JOVIS

Nov. 11, 1679. S.V. hor. $5\frac{1}{2}$. P.M.

Tempus corrigitur ab ore Pegasi existente in meridiano, ut sit hor. 5. 33'. 44.

u distabat à stella prima arietis $9^d. 21'$.

Eratque præcise in eodem verticali cum lucida in sinistro cornu.

At vero addendo propter dilatationem (vel refractionem) radiorum Jovis, & demendo propter excentricitatem oculi in instrumento, cujus radius erat ped. 6. & unc. 4. pono distantiam, 9. 20'.

Differentia meridianorum inter *Lamportiam* & *Londinum*, ad cujus meridianum tabula *Caroline* sunt composita, erat $3'. 10''$.

Nempe *Lamportia* occidentalior est *Londino*, ideoque tempus apprens *Londini* erat hor. 5. 37'. 44.

Tempus medium, viz. ad quod tabula computantur, erat, h. 5. 26'.

Erg. long. u per tab. *Car.* erat $8. 10. 36. 55''$.

Latitudo australis. $1. 23. 24.$

Altitudo

Observationes Planetarum.

II

| | |
|--|---------------|
| Altitudo meridiana \mathcal{U} erat | 47°. 20'. 0". |
| Elevatio poli <i>Lampurtia</i> | 52. 25. 0. |
| Ergo declinatio \mathcal{U} per meth. 3. supra | 9. 45. 0. |
| Ascensio recta | 29. 2. 0. |

Ergo per methodum *Wingi* Harm. Coel.

| | |
|---|-----------|
| li. 2. c. 15, & 16. Sed operando per tabulas <i>Carolinas</i> , longitudo <i>Jovis</i> esset δ . | 1. 6.48. |
| latitudo australis | 1. 44.30. |

Sed per defectum quadrantis minuti & noctis obscuritatem, non adeo accuratè accepi \mathcal{U} meridianam altitudinem, atque distantiam prius memoratam, unde nimiam discrepantiam inter longit. ortam esse puto, viz.

0. 30'. 7".

OBSERVATIO nuperi COMETÆ,

Langoportæ, 1687.

Non necesse est ut Cometæ accuratè observentur; sed satis est si horæ, altitudines, &c. præter propter accipiantur.

Dec. 11. 1680. Lucida in scapulis Aquilæ seu Vulturis volantis reliquit caudam Cometæ ad dextram oculi spectantis aliquot gradus. Sed,

Dec. 15. Caudæ linea media sec. longitudinem, reliquit lucidam illam, versus dextram, tantillum quidem, nempe, ut conjicere potui $\frac{1}{2}$ lineæ ad mediam illam normalis: Hor. 5. P. M. Cometa erat alt. gr. 6. lucida Vulturis, alt. 26. cauda ad ipsum Cygnum exporrecta.

Dec. 17. Die Veneris, hor. 5. P. M. circiter, Luna exacte in meridiano existente, erat Cometa alt. gr. 12. Vultur.

Vultur. 27° . alt. Distabat Cometa à Vulturis lucida 15° . $4'$. à Venere 23° . Erat cauda immanis magnitudinis, albicans & oculos perstringens.

Dec. 25. Die Saturni, hor. circiter $5\frac{1}{2}$, Cometa alt. 32° . cauda ad Cassiopeiam pertingens, paulo orientalius.

Dec. 29. Die Mercurii, hor. $5\frac{1}{4}$ circiter, erat Comet. alt. gr. 45. Cauda penetravit triangulum in pectore Pegasi, & immanis longitudinis, extensa ultra Persei lucidam, paulo occidentalius, viz. longa erat prope 50 . grad.

Jan. 4. Distabat à capite Andromedæ fere 4 . gr.

Jan. 5. Die Mercurii, distabat à capite Andromedæ quantitatem lunaris diametri.

Jan. 6. Peregrinatus sum, sed Cometa sensim obscurior esse cœpit, coma valde languidior, & indies multo brevior, quasi intra septimanam unam vel alteram evanesceret.

Id. in hac historia maxime notandum quod Dec. 15. die Merc. lucida & media trium in scapulis Aquilæ erat in caudæ medietullo; nam scriptum est in Epistola ab *Edinburgo*, lucidam Aquilæ fuisse Dec. 15. in medio caudæ; unde aliquatenus & quatenus alii alibi consequerint de parallaxi judicare liceat.

Unde etiam liquet apparentiam caudæ non variari (quoad locum) pro positione oculi spectantis, ut fit in intuitione iridis, cujus colores sub certo tantum angulo conspiciuntur, ideoque eadem numero iris non videtur à spectatoribus in diversis locis, nec versus eadem puncta.

Quidam

Quidam amicorum meorum existimavit caudam fuisse in atmosphæra, & certe quasi ibi esset visa est; sed tum intra unius vel alterius milliariis distantiam parallaxis fuisset notabilis; ut fit in nubibus spectandis, certe raro observabis nubem ultra unius milliariis altitudinem, ut obiter ostendam methodum quam hujus rei causa aliquando concepi, viz. Normaliter ad planum horizontale ducatur planum transeuns per umbram nubis, nubem ipsam & solem; vocetur intersectio A: ducatur aliud planum normaliter ad horizontem per oculum & nubem, intersecans planum per umbram, vocetur intersectio B: denique appelletur linea ab umbra ad nubem C. Dico quod ex A B C fiet triangulum rectangulum, cujus angulus ad umbram datur, viz. = altitudini solis; & latus A accipi potest, ergo dabitur B, altitudo nubis.

Quod si Sol sit 45 gr. alt. erit $A=B$; nam erit ABC triangulum *Isoceles*, cujus latera A & B æqualia.

Sed redeo ad Cometas, quorum philosophiam paucis complectar quamvis fuerint æterna corpora, quod non moventur in circulis planeticis circa vel extra terram, sic probatur; nam si paucos tantum gradus ingentium circulorum absolverent, approximatio ad oculum minor esset quam quæ variationi lucis & diametrorum diminutioni sufficeret, si multos, brevi tempore redirent. Nec sufficiens ratio daretur caudæ, quæ quod efficitur à Solis radiis, inde liquet quod semper est à Sole aversa, uti de iride observatur.

Non autem per radiorum reflexionem ab opacis corporibus, nam impossibile est (quicquid *Cartesius* assert ex incertis historiis) ut Cometa tam giganticam caudam haberet, Venus autem nullam, quæ Dec. 17. di-

stabat tantum 23 gr. Et proculdubio color Cometae non fuscus vel sabrusus fuisset instar ignis fumantis, sed clarior & nitidior, ut est Lunæ & Planetarum. Dein haud adeo perfecte & undique cauda unita fuisset corpori Cometae, si reflexio ab externa superficie facta fuisset, adde quod in reflexione singuli radii à singulis punctis hæmisphærii convexi, quaquaversus seorsim reflectuntur & disperguntur; ideoque neque conum acutum constituere queant, nec satis potentes esse ad illustrandam ætheris partem aliquam, ita ut sit objectum visus terminativum. Relinquitur igitur, ut dicamus cum *Pena & Keplero*, (Vid. Præfat. in *Kepl. Dioptr.*) caudam fieri per refractionem radiorum Solis in corpore pellucido Cometae, concursu omnium radiorum, existente paulo post Cometam, qui dein disperguntur, cujus rei experimentum habemus partim à radiis Solis per transfennam fulgentibus in obscuro loco, sed partim & præcipue à vitro combustorio in loco irradiato sed fumoso: dixi cum *Keplero*, (paulo post Cometam,) nempe, si refractionis quantitas eadem fuerit cum quantitate refractionis in vitro vel crystallo, confer *Kepl. Dioptr. prop. 35. & prop. 138.* sed hujus rei nulla est necessitas; & certe dispersio visa est, quasi in ipso corpore inceperat: Quære, annon hinc accendi possit materia combustibilis Cometae, imo etiamsi punctum concursus esset paulo post, modo fuerit protuberantia aliqua.

Ex hac hypothesi ratio caudæ est manifestior quam ut pluribus sit opus; dein hanc sententiam suadere videtur color caudæ flammeus & prope Cometam rubicundus, quasi ignis in eo esset accensus, siquidem
notum

notum est quod radii lucis participant de colore medii quod pertranseunt; obscuritas etiam gradualis deflagrationem arguit; denique quod Cometae sublunares istius naturæ sunt nemo unquam dubitavit.

Possint esse in tam immenso spatio permultæ istiusmodi Collectiones combustibilis & pellucidæ materiæ, sed veluti Meteora in Atmosphæra, videri nequeant, antequam ignem conceperint.

P R O
H O R O L O G I O R U M
Descriptione.

LINEA Chordarum dividitur hoc modo;
Divide Quadrantem in 90 gr. & intervalla omnium graduum ope circini transferantur in lineam rectam: hæc recta appellatur linea chordarum: Usus est, Accipe intervallum 60 gr. = semidiametro quadrantis, & hoc intervallo ab intersectione duarum linearum normaliter ductarum describe quadrantem; tum accipe intervalla de linea chordarum pro quibusvis angulis describendis: ut opus;

Linea sinuum fit dividendo semidiametrum quadrantis per sinus rectos, id est, lineas perpendiculariter dimissas à singulis gradibus quadrantis.

Horologia omnia supponuntur fieri originaliter ad centrum terræ, ita ut lineæ horariæ sint intersectiones planorum

planorum quorumvis per centrum terræ, cum circulis vel planis horariis. Circuli autem horarii transeunt per polos mundi & singulos 15 gradus æquatoris; nam quia Sol æqualiter movetur in æquatore & planis parallelis per totum annum, erit & necessario per totum annum eadem hora, in eodem plano horario.

Jam quoniam in Horologiis quæ apud terræ superficiem construuntur stylus gnomonicus repræsentat axem mundi, eadem dici possunt sine errore sensibili de planis horariis factis, dividendo per singulos 15 gr. minorem circulum circa stylum, ita ut stylus elevetur ad elevationem poli, & circulus ille minor ad elevationem æquatoris, quem repræsentat.

Descriptio Horologii horizontalis.

Pro descriptione Horologii horizontalis, per singulos 15 gr. minoris circuli à centro ejusdem, ducantur lineæ, intersectionem plani, minoris circuli & horizontalis (quam vocant Contingentem) interfecantes & harum intersectionum puncta notentur, per quæ à centro Horologii, cui inseritur stylus, ducantur lineæ horariæ.

Mechanica praxis est, ut sequitur.

Ducantur duæ lineæ normaliter bd pro hora duodecima, & bc pro hor. 6. ducatur stylus bi , ita ut ang. $i b d$ = elev. poli $52^{\circ} 15'$. accipe ad libitum quodvis punctum in linea meridiana, puta d , à quo ad stylum dimittatur perpendicularis de = sin. elevat. poli: huic æqualis, df , transferatur in meridianam, & ducatur contingens normaliter ad meridianam in d .

A centro *f* describatur circulus, quovis intervallo, (quo majus eo melius) & dividatur in singulos 15 gr. id est, in 24 partes, sed satis est si quadrans dividatur in sex partes: fiant puncta in contingente, ubi secatur à regula ad centrum *f*, & singulos 15 gr. posita.

Denique à centro *b*, per puncta in contingente, ducantur horæ, erigendo stylum super meridianam ad ang. *i b d*.

Eodem modo fit Horologium verticale, meridionale, nisi quod loco elev. poli. 52. 15'. sumendum ejus complementum = 37. 45'. pro horis tantum duodecim.

Aliter sic per Logarithmos. Elev. poli 52. 17.

Ab intersectione duarum linearum normaliter ductarum, ut ante dictum, nempe à centro *b* describatur quadrans, & sumantur de linea chordarum partes à meridiana in quadrante, singulis horis totidem 15 gr. assignando, juxta hanc analogiam dic pro hora prima, ut rad. ad tang. horæ primæ (id est, 15 gr.) ita sin. elev. poli ad tang. distantia, lineæ horariæ (id est, lineæ pro prima hora) à meridiana linea; & similiter pro reliquis horis.

| | |
|---------------|----------|
| Rad. | 10, |
| Tang. 15. | 9,428052 |
| Sin. 52. 17'. | 9 898201 |

9.326253. Tang. 11. 58'. pro prima hora, & similiter pro reliquis horis, ut in Figura.

Descriptio verticalis Horologii declinantis.

Esto elev. poli $52. 25'$ declin. versus occid. 41^d .

A duarum linearum normaliter ductarum (ut ante) puncto intersectionis, b , ope lineæ chordarum, fiat angulus æqualis elevationi æquatoris, $37. 35'$. $e b d$.

Fiat alter, $n b d =$ declin. 41 gr.

Ducatur $d e$ ad meridianam perpendicularis, à quovis puncto ad libitum sumpto, puta, d .

Longitudo, $d e$, transferatur in $b n$; ab n dimittatur perpendicularis ad meridianam, $n m$; dein transferatur $n m$ ad dictam perpendicularem $= d p$, per b & p ducatur linea subtilis, ad quam, in puncto p , ducatur perpendicularis, pro contingente.

Longitudo, $b m$, transferatur in contingentem $= p r$, tum per centrum, b & r , ducatur stylus, cuius altitudo, super substylarem, ad ang. rect. erit $p b r$.

A p ad stylum dimittatur perpendicularis, $p s$.

Transferatur $p s$ ad substylarem, $= p o$.

A centro o describatur circulus æquinoctialis quovis intervallo, (quo majus eo melius) & dividatur in singulos 15 gr. inchoando divisionem ab ea parte circuli, W , qua secatur à regula applicata ad \odot & X , punctum intersectionis conting. & merid. fiant puncta in contingente, ubi secatur à regula per centrum \odot & singulos 15 gr. vel $7\frac{1}{2}$ pro semihoris.

Denique, à centro b , per puncta in contingente, delineentur horæ.

Diagramma sequitur.

Hæc-

Haecenus *Falo*, nostrati, id tantum addidi, quod æquinocbialem descripsi longiore radio; quod quidem est magni momenti; nam omnes circuli sunt similes, sed majores facilius & accuratius dividuntur.

Sic autem, logarithmis utendo, per quatuor Operationes.

Operatio I.

Ut radius ————— 10,000000
ad cotang. elev. 37. 35. ————— 9 886288
ita fin. declin. 41 gr. ————— 9 816943

ad tang. distant. substyli, à merid. 9 793231 = 26. 47.

Operatio II.

Ut radius ————— 10,
ad cosin. declin. 49. ————— 9 877780
ita cos. elev. 37. 45. ————— 9 785269

ad sin. altitud. styli supra subst. 9 663049 = 27. 25.

Operatio III.

ut fin. elev. 52. 25. comp. arth. 0 101019
ad rad. ————— 10,000000
ita tang. declin. ————— 9 939163

ad tang. inclinationis meridia- }
norum, nempe plani & loci — } 10,040182 = 47. 39.

Per meridianum loci intellige planum, quod per stylum, lineam horæ duodecimæ & verticem loci transit.

Per meridianum plani intellige circulum, qui per poleum mundi, stylum & lineam substylarem transit.

Per inclinationem horum meridianorum, non est intelligenda distantia substylaris à linea horæ dur decimæ, (ut quidam scribunt) sed angulus ad stylum, id est, ad intersectionem duorum planorum memoratorum, qui angulus mensuratur ab arcu æquatoris, cujus planum secat utrumque illorum ad ang. rect. Ex hoc angulo invento, per hanc tertiam operationem, tolle singulos 15 gr. donec ad additionem perveneris. Sic ex 47. 39'. tolle 15, rest. 32. 39'. pro angulo ad polum & hora prima.

Operatio IV.

| | |
|--|---------------------|
| Ult rad. ————— | 10,000000 |
| ad fin. alt. styli 27. 25'. ——— | 9 663190 |
| ita tang. ang. comprehensi in- ter horam datam & meridia- num plani, ad polum, 32. 39. } ——— | 9 806693 |
| ad tang. distantia: lineæ horariæ à substil. ————— } ——— | 9 469883 = 16. 26'. |

Computabis reliquas distantias pro singulis horis similiter; tum, facto quadrante vel circulo, ut opus, à centro *b*, sume arcus inventos de lineæ chordarum, vel aliter, ut visum erit: reliqui anguli ad polum & distantia: sunt 17. 39. &c. ut in margine Schematis. Vide *Wingat.* Append. ad Logarith. Et dixeris forte me rem tibi gratam fecisse.

*Lepida forma Horologii, quo nulla linea apparent,
nisi lucente Sole, viz.*

Fiat ad vitrum in fenestra Horologium verticale, & inverso ordine, quasi esset boreale Horologium, à vitra-rio describantur lineæ, quæ ad uncia unius vel alterius distantiam occultentur charta, cornu, vel materia alba, non transparente, tum eo loci quem stylus ascendendo (ut solet in borealibus Horologiis) chartam penetraret, fac in charta maculam: dico quod, lucente Sole, linea pro hora diei secabit maculam. Habui à Domino Woolbaston, Warwicensi.

*Efficere Horologium pro cylindro vel baculo
ambulatorio.*

In charta plana ducatur linea quæ bis circumdaret baculum, & dividatur, ut linea sinuum, nempe semicirculus à media parte utrinque; primum punctum in hac linea sinuum erit pro Sole in primo gradu Capricorni; primus proximorum triginta gr. pro Sole in 1. gr. A-quarii, &c. juxta ordinem signorum, & sufficit, si 30 gr. in tres tantum partes dividantur, quod in primis & ultimis triginta, vix fieri potest vel opus est: A punctis solstitialibus & æquinoct. (& ab aliis, ut 10. 8. si opus,) ducantur perpendiculares, quæ sint tangentes, radius autem erit stylus, qui lineæ sinuum perpendiculariter insistere debet.

Altitudines meridianæ Solis in punctis solstit. & æquinoct. computentur, & notentur in perpendicularibus dictis;

dictis ; per loca notata describatur circulus, ut *Euclides* docuit, pro hora duodecima : & fac similiter pro reliquis horis.

Denique applicetur cylindro chartæ pars dimidia, & reliqua reflectatur : sed nota quod vel stylus vel cylindrus mobilis esse debet ; ita ut stylus decima die Dec. sit supra punctum primum lineæ sinuum ; 10. die Jan. supra primum punctum proximorum triginta, & 10. die Mar. super ultimum ; tum retro ambulandum, & sic retrorsum & prorsum per totum annum.

Si tibi dubitare contigerit, consule *Fali* Horol. c. 28. ubi ostendit modum cognoscendi horam per altitudines, viz. per quadrantem, super iisdem rationibus fundatum, unde hæc proposito meo accommodavi.

Liquet ex supra dictis quod Sol vel umbra ad eandem horam necessario jacebit in eodem plano horario ; planum autem horarium puta pro hora tertia, transit per stylum & lineam, quæ in Horologio horizontali describitur pro hora tertia : Hinc, ope Horologii horizontalis horizontaliter & horologicè positi, id est, ita ut linea meridiana Horologii sit in plano meridiano, facile est, super quodvis planum, quovis modo inclinans vel declinans, cujuscunque generis aliud Horologium describere :

Esto igitur Problema catholicum.

*Ope Horologii horizontalis, nullum non Horologium
construere.*

Si velles Horologium murale describere ; Horologium

gium horizontale applicetur prope murum, horologicè ut oportet.

Tum stylus, ope fili vel regulæ, producaturn ad punctum in muro pro stylo murali; dein filum idem successive ducatur, secundum ductum planorum horariorum, pro singulis horis; quod & ope candelæ vel ipsius oculi commodè fieri potest, dum eodem ietu oculi, tum linea horizontalis Horologii rummurus simul conspiciuntur per stylum.

Si velles describere Horologium, cujus centrum in aëre aprico ad cameræ tuæ laquear vel parietes, ut ope radii reflexi à lente in fenestra hora innotescat, non potest dari melior methodus quam si invertatur Horologium horizontale, & applicetur fenestræ horizontaliter & horologicè: tum, secundum ductum styli, producaturn filum à lente vel centro ad pavementum, ibique clavo figatur, & si placet, excindatur, ita ut residua pars fili maneat libera & satis longa ut ad quasvis laquearis partes extendatur: dein ab eodem centro aliud filum ducatur ab amico aliquo, sec. ductum singularum Horologii linearum, & teneatur manu donec tu interim stylare filum dirigas ad laquear vel parietes, puncta notando pro lineis horariis, quando nempe stylare filum à clavo tetigerit filum amici tui.

Eadem methodo facile est componere Horologium pro radio directo, à macula vel foramine in fenestra; sed tum Horologium non invertendum, & clavus supernè figendus.

Si puncta notentur & horæ scribantur ad tabulati fenestralis marginem, pars aliqua fili à clavo pendere debet, ut ad horam notatam per umbram vel radium à foramine dirigatur.

Quidam

Quidam pro Horologiis declin. describendis, super horizontalis Horol. meridianam erigunt tabulatum perpendicularare & ad omnes declinationum gradus versatile, pro stylo autem utuntur filo per utriusque plani meridianas lineas.

FINIS.

ERRATA.

- Pag. 48. l. 9. pro Cap. VIII. lege Cap. X.
 Pag. 52. lin. antepenult. $\frac{3}{4}$ è 21?
 p. 68. l. 6. à fine, *gnomon*, pro &c.
 l. 13. *id. est* $10 = 2A$.
 p. 75. l. 4. à fine, $A = r7. - r4.$ &c.
 l. 5. $Eq = r (11. - r 112)$ &c.
 p. 76. l. 2. *max. c. m. r c 5.*
 l. 4. *r c 5 max. c. m.*
 l. 8. Incipiat Sectio sic, 9. *Ex quadratis*, &c.
 l. 10. dele 9.
 l. ult. *modum esse verum, experiundo*, &c.
 p. 79. l. 8. dele 12.
 l. 9. Incipiat Sectio sic, 12. *Radix qu.* &c.
 p. 86. l. 5. *id. est in hac arte*—
 p. 103. l. 5. à fine, *extrahenda sita*
 p. 106. l. 5. à fine, *omissimus*.
 p. 112. l. 2. *duobus*.

